

Méthodologie d'homogénéisation découplée des matériaux composites hyperélastiques anisotropes en grandes déformations.

A. Gamra^{1,2}, K. Mansouri², Y. renard¹, M. Arfaoui², Ch. Douanla-Lontsi³, T. Homolle³

¹ Université de Lyon, INSA Lyon, CNRS UMR 5259, LaMCoS, F-69621, France, {yves.renard, anwargamra}@insa-lyon.fr

² Université de Tunis El Manar, École Nationale d'Ingénieurs de Tunis, LR-11-ES19, Laboratoire de Mécanique Appliquée et Ingénierie, Tunis 1002, Tunisie, {makrem.arfaoui, khalil.mansouri, anwar.gamra}@enit.utm.tn

³ Michelin, Technology centre, Ladoux, France, {charlie.douanla-lontsi, thomas.homolle}@michelin.com

Résumé — Nous présentons une méthodologie visant à modéliser le comportement des composites à matrice caoutchouteuse ayant des propriétés d'anisotropie et quasi-incompressibilité en employant une approche d'homogénéisation à deux échelles. Cette méthode est dérivée de l'approche développée par Terada et al.[1], laquelle repose sur la séparation des échelles micro et macro en considérant des problèmes aux limites (PL) distincts. Les (PL) non linéaires à deux échelles, à la fois microscopiques et macroscopiques, sont généralement fortement couplées dans la plupart des approches d'homogénéisation. La méthode que nous utilisons nous permet de les séparer sans compromettre les caractéristiques distinctes des PL à deux échelles. Plus précisément, au moyen de cette méthode, la solution du problème macroscopique reflète le comportement mécanique du problème microscopique, et réciproquement. Nous menons des études numériques représentatives en utilisant un matériau hétérogène hyperélastique pour démontrer l'efficacité et la fiabilité de l'approche proposée pour des matériaux anisotropes présentant une asymétrie entre traction et compression.

Mots clefs — hyperélasticité, méthode d'homogénéisation, découplage, asymétrie en traction-compression.

1. Introduction générale

Dans le cadre de l'homogénéisation des matériaux composites hyperélastiques [3], à l'exception de situations très spécifiques en ce qui concerne les lois de comportement utilisées à l'échelle microscopique et en termes de chargement [4], il n'est pas possible d'identifier la loi homogénéisée dans le cas non linéaire, ce qui rend impossible le découplage entre les échelles micro et macroscopiques. De nouvelles approches ont alors été développées, comme l'homogénéisation numérique (HN). Prenons par exemple l'utilisation de la méthode des éléments finis à deux échelles, également appelée l'approximation FE2. Cette approche maintient le couplage micro-macro et est constituée de deux étapes : une étape de localisation qui permet de passer de l'échelle macroscopique à l'échelle inférieure suivie d'une étape d'homogénéisation qui permet de revenir à l'échelle macro. En chaque point de Gauss du maillage macroscopique, les déformations sont prélevées et appliquées sur une cellule représentative de la microstructure locale du matériau que l'on sollicite en condition périodique. Cependant, réaliser ce type de calcul est souvent extrêmement lourd voire infaisable même lorsque des stratégies de réduction de modèle sont appliquées, au vu du nombre énorme de degrés de liberté mis en jeu, ce qui peut constituer un obstacle à son utilisation.

Dans ce contexte, l'approche numérique découplée, présentée par Terada et ses collaborateurs dans leur publication [1], permet d'atteindre des coûts de calcul similaires à ceux obtenus lors d'une analyse classique en mécanique des structures avec un matériau homogène. Néanmoins, cette réduction des coûts s'accompagne d'une approximation additionnelle concernant la loi homogénéisée, dont la forme est préalablement définie avec un nombre variable de paramètres.

Tout d'abord, ce document propose un rappel de la méthode d'homogénéisation micro-macro

découplé telle que développée par Terada et al. [1], et de son extension réalisée par Karoui S. [2]. Dans un second temps, Nous appliquons cette méthode à des problèmes aux limites concernant des matériaux composites hyperélastiques orthotropes avec l'exemple d'un matériau dans lequel les fibres de renfort sont orientées dans deux directions perpendiculaires à l'intérieur de la matrice. Enfin nous mettons en œuvre cette approche sur une classe de matériaux composites hyperélastiques isotropes transverses quasi-incompressibles qui présentent un comportement distinct en traction et en compression.

2. La méthode de découplage micro-macro

La méthode d'homogénéisation s'appuie sur les travaux préalablement réalisés par Terada et al.[1] et peut être subdivisée en plusieurs étapes, chacune jouant un rôle crucial dans le processus d'homogénéisation découplé :

- i Sélectionner un modèle de comportement macroscopique anisotrope (Potentiel Homogénéisé) en adéquation avec le comportement macroscopique du matériau.
- ii Effectuer des simulations numériques sur un volume élémentaire représentatif (VER) composé d'un matériau hétérogène (matrice / fibres) approchés par éléments finis (EF) :
 - Sélectionner de manière aléatoire un ensemble de déformations macroscopiques H pour les tests numériques.
 - Calculer le tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff (\mathbf{S}_{heter}) en résolvant le problème aux limites correspondant par intégration sur VER hétérogène avec des conditions aux limites périodiques (PBC).
- iii Identification à l'échelle macroscopique des coefficients du potentiel homogénéisé sélectionné :
 - Exprimer le deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff (\mathbf{S}_{homog}) en termes du potentiel homogénéisé sélectionné et des coefficients $p^{[k]}$ du matériau. Dans le cas où le potentiel est linéaire par rapport à ses coefficients, on obtient $\mathbf{S}_{homog} = \sum_{k=0}^n p^{[k]} \mathbf{g}^{[k]}$ où $\mathbf{g}^{[k]}$ sont les dérivées des différents termes du potentiel.
 - Déterminer les coefficients macroscopiques au moyen d'une méthode d'optimisation basée sur la minimisation des écarts quadratiques (SLSQP), il s'agit de minimiser

$$\theta(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^{ntest} \left(\frac{\|\mathbf{S}_{homog}^{(\alpha)}(\mathbf{p}) - \mathbf{S}_{heter}^{(\alpha)}\|_2}{\|\mathbf{S}_{heter}^{(\alpha)}\|_2} \right)$$
 éventuellement avec des contraintes sur les coefficients.
 - Évaluer la capacité du potentiel théorique à reproduire de manière précise le comportement du VER en calculant l'erreur locale entre \mathbf{S}_{homog} et \mathbf{S}_{heter} .

3. 1. Vérification de la méthode d'homogénéisation dans le cas NéoHookéen

La validité de la méthode de découplage des échelles micro- est examinée en comparant ses prédictions avec une expression explicite du comportement effectif des composites caoutchouteux à

fibres métalliques, les fibres et la matrice de la microstructure RVE sont représentées par un potentiel néo-hookean quasi-incompressible

$$\mathbf{W}_{NHK} = \mathbf{D}_{1,i}(J^2 - 1) + \mathbf{C}_{01,i}(\bar{I}_1 - 3) \quad (1)$$

L'invariant J du modèle hyperélastique (1) représente la variation de volume et est une grandeur scalaire dépendant du gradient microscopique de la transformation \mathbf{F} , exprimée par $J = \det(\mathbf{F})$.

L'invariant réduit \bar{I}_1 de la partie isochore est donné par $\bar{I}_1 = \text{tr}(\bar{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{F}})$ avec $\bar{\mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F}$ les coefficients \mathbf{C}_{01} et \mathbf{D}_1 s'expriment en fonction du module de Young E et du coefficient de Poisson ν de la matrice (m) et des fibres (f) comme suit : $\mathbf{C}_{01,i} = \frac{E_i}{4(1+\nu_i)}$; $\mathbf{D}_{1,i} = \frac{E_i}{6(1-2\nu_i)}$.

Le potentiel homogénéisé analytique développée pour un comportement hyperélastique isotrope transverse incompressible par [4] est donné par :

$$\mathbf{W} = \frac{\mu_{ih}}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{\mu_n - \mu_{ih}}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{\bar{I}_4}} - 3 \right) + \frac{\mu_n - \mu_{hs}}{2}(\bar{I}_4) - \frac{\mu_{ih} - \mu_{hs}}{2} \left(\frac{\bar{I}_5}{\bar{I}_4} \right) + \mathbf{D}(J^2 - 1) \quad (2)$$

avec μ_{ih} , μ_{hs} et μ_n des paramètres matériaux scalaires donné dans le cas incompressible par :

$$\begin{aligned} \mu_{ih} &= (1 - V_f)^2 \left(1 + \frac{2(2-V_f)V_f}{(1-V_f)^2} \frac{\mu_f}{\mu_m} + \frac{\mu_f^2}{\mu_m^2} \right) \frac{\mu_m}{2} \\ &\quad - (1 - V_f)^2 \sqrt{\frac{2}{(1-V_f)^2} \frac{\mu_f}{\mu_m} \left(1 + \frac{2(2-V_f)V_f}{(1-V_f)^2} \frac{\mu_f}{\mu_m} + \frac{\mu_f^2}{\mu_m^2} \right) \frac{\mu_f - \mu_m}{2}} \quad , \\ \mu_{hs} &= \mu_m \left(\frac{(1+V_f)\mu_f + (1-V_f)\mu_m}{(1-V_f)\mu_f + (1+V_f)\mu_m} \right) \quad , \\ \mu_n &= \mu_f V_f + (1 - V_f)\mu_m \quad . \end{aligned}$$

avec $0 < V_f < 1$ étant la fraction volumique de fibres, $V_m = 1 - V_f$ étant la fraction volumique de la matrice et μ_m et μ_f étant les modules de cisaillement (coefficients de Lamé) des fibres et de la matrice, respectivement.

Pour que l'identification des coefficients du potentiel choisi soit aussi représentative que possible, il est important de la soumettre à un panel suffisamment varié de sollicitations. Nous appliquons six sollicitations principales (et neuf sollicitations combinées entre les sollicitations (1, 2,3) et (4, 5,6)) de déformations macroscopiques en imposant le gradient de déplacement $\tilde{\mathbf{H}}$, tel qu'introduit dans le Tableau 1.

Pattern-1: Uniaxial tension in the direction of x $\tilde{\mathbf{H}}_1 = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$	Pattern-4: xy shear $\tilde{\mathbf{H}}_4 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & h & 0 \\ h & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$
Pattern-2: Uniaxial tension in the direction of y $\tilde{\mathbf{H}}_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$	Pattern-5: xz shear $\tilde{\mathbf{H}}_5 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & h \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ h & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$
Pattern-3: Uniaxial tension in the direction of z $\tilde{\mathbf{H}}_3 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$	Pattern-6: yz shear $\tilde{\mathbf{H}}_6 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & h \\ 0 & h & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$

Tab.1. Ensemble de sollicitations Macroscopique \mathbf{H} .

Les tests sont réalisés avec $\mathbf{V} = \mathbf{V}_f = \mathbf{V}_m = 0,49$ et $V_f = 0,196$. Nous procédons à l'identification des paramètres de la loi homogénéisée (2) à l'aide d'un ensemble d'entraînement composé de 50 expériences pour chaque configuration simple et des combinaisons mixtes du tableau 1, pour une plage de déformations allant jusqu'à 30%, puis nous comparons les résultats aux valeurs théoriques (2)

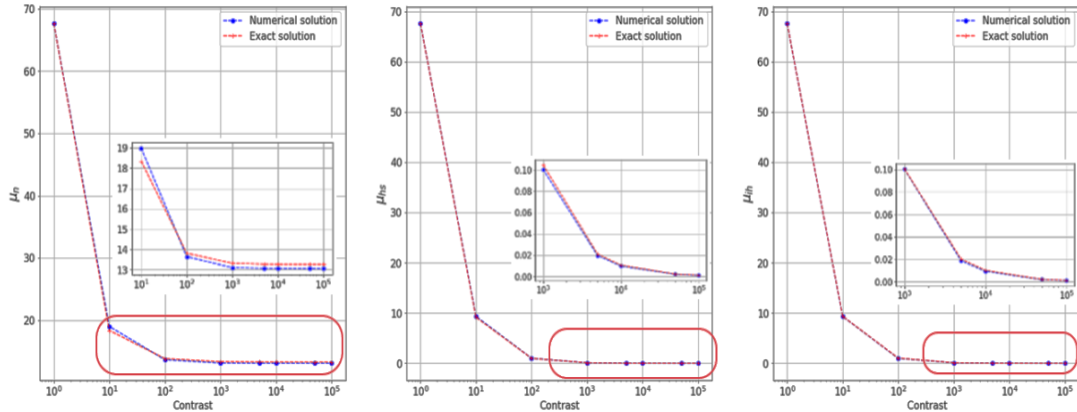


Fig.1. Résultat de l'erreur entre les coefficients numériques et analytiques pour $\mathbf{V} = \mathbf{V}_f = \mathbf{V}_m = 0.4999$

Les résultats de l'identification, présentés sur la figure 1 pour un coefficient de Poisson $\nu = \nu_f = \nu_m = 0.4999$, montrent une bonne concordance entre les valeurs identifiées de μ_{ih} , μ_{hs} et μ_n et leurs valeurs théoriques. Dans l'ensemble, ces expériences numériques démontrent que l'identification basée sur un ensemble d'entraînement permet d'identifier la loi homogénéisée avec une grande précision.

3. 2. Erreurs Locale

Dans le cas de la section précédente, la loi homogénéisée a été identifiée de manière exacte, et par conséquent, le découplage n'entraîne pas d'approximation supplémentaire. Dans le cas général où cette identification ne peut pas être réalisée de manière exacte, la forme du modèle homogénéisé choisie correspond à une approximation supplémentaire. Une façon de mesurer l'erreur d'approximation une fois que l'identification a été effectuée est de calculer l'erreur locale entre la contrainte calculée avec le modèle homogénéisée et S calculée sur VER hétérogène (fibre/matrice). Dans ce but, nous introduisons la mesure d'erreur locale suivante :

$$S_h \text{ Erreur}(H^{[\alpha]}) = \left(\frac{\|S_h(p, H^{[\alpha]}) - S^{(\alpha)}\|}{\|S^{(\alpha)}\|} \right)$$

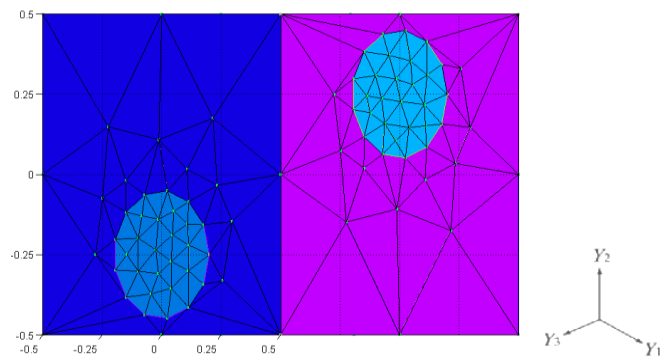


Fig.2. VER Hétérogène

Dans les sections suivantes, nous présentons des études numériques de cette erreur locale pour différents choix des modèles homogénéisés.

3.3. Etude numérique

Nous considérons une classe de modèles constitutifs hyperélastiques anisotropes, qui sont exprimés en utilisant les invariants du tenseur de déformation de Cauchy-Green à droite C ainsi que les vecteurs de "fabrication" qui indiquent la direction des fibres.

3.3.1. Modèle avec des fibres travaillant en tension et en compression.

Dans cette étude, nous examinons un modèle dans lequel les fibres travaillent à la fois en traction et en compression, la fibre est représentée par une loi hyperélastique de Saint-Venant Kirchhoff, tandis que la matrice est représentée par une loi hyperélastique de Mooney-Rivlin quasi-incompressible.

Nous considérons une classe de modèles constitutifs hyperélastiques anisotropes, dont la forme fonctionnelle est exprimée au moyen des invariants du tenseur de déformation de Cauchy-Green à droite C ainsi que du vecteur dit "*Fabric vector*" indiquant la direction des renforts. La fonction d'énergie élastique du modèle hyperélastique anisotrope employée est donnée par :

$$W = W_{vol}(J) + W_{iso}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + W_{aniso}(I_4; I_5; I_6; I_7; I_8; M_0; M_1) \quad , \quad (3)$$

où M_0 et M_1 sont les deux directions distinctes de l'alignement des fibres dans la configuration de référence et les invariants sont définis comme suit :

$$\bar{C} = \bar{F}^T \cdot \bar{F} = J^{-2} F^T \cdot F = I_3^{-\frac{1}{3}} C \quad ,$$

$$\bar{I}_1 = tr(\bar{C}); \quad \bar{I}_2 = \frac{1}{2} (tr^2(\bar{C}) - tr(\bar{C}^2)) \quad ,$$

$$I_4 = M_0 \cdot C M_0; \quad I_5 = M_0 \cdot C^2 M_0; \quad I_6 = M_1 \cdot C M_1; \quad I_7 = M_1 \cdot C^2 M_1; \quad I_8 = (M_0 \cdot M_1) M_0 \cdot C M_1 \quad .$$

Le potentiel hyperélastique homogénéisé est une extension de la fonction de densité d'énergie de déformation de Kaliske, telle que présentée dans [1,2]. Ainsi, la densité d'énergie de déformation W est exprimée comme la somme de trois parties : la fonction d'énergie volumique notée W_{vol} et la fonction d'énergie isotrope W_{iso} qui dépend que de la partie déviatorique du tenseur de déformation C et la fonction d'énergie anisotrope W_{aniso} :

$$W_{vol} = D_0(J^2 - 1) \quad ,$$

$$W_{iso} = a_1(\bar{I}_1 - 3) + a_2(\bar{I}_1 - 3)^2 + a_3(\bar{I}_1 - 3)^3 + b_1(\bar{I}_2 - 3) + b_2(\bar{I}_2 - 3)^2 + c_3(\bar{I}_2 - 3)^3,$$

$$W_{aniso} = c_2(I_4 - 1)^2 + c_3(I_4 - 1)^3 + c_4(I_4 - 1)^4 + c_5(I_4 - 1)^5 + c_6(I_4 - 1)^6 +$$

$$d_2(I_5 - 1)^2 + d_3(I_5 - 1)^3 + d_4(I_5 - 1)^4 + d_5(I_5 - 1)^5 + d_6(I_5 - 1)^6 + e_2(I_6 - 1)^2 +$$

$$e_3(I_6 - 1)^3 + e_4(I_6 - 1)^4 + e_5(I_6 - 1)^5 + e_6(I_6 - 1)^6 + f_2(I_7 - 1)^2 + f_3(I_7 - 1)^3 +$$

$$f_4(I_7 - 1)^4 + f_5(I_7 - 1)^5 + f_6(I_7 - 1)^6 + g_2(I_8 - \chi)^2 + g_3(I_8 - \chi)^3 + g_4(I_8 - \chi)^4 +$$

$$g_5(I_8 - \chi)^5 + g_6(I_8 - \chi)^6 \quad .$$

Le modèle de VER utilisés pour la vérification numérique dans cette étude représente une microstructure périodique d'un composite renforcé de fibres à 90°. Les vecteurs $M_0 = [I, 0, 0]$ et $M_1 = [0, 0, I]$ représentent les directions des fibres. La fraction volumique du VER est de 15 % (voir figure 2).

Les tests sont menés pour diverses déformations allant jusqu'à 30 % et différentes valeurs de contraste $c = \frac{E_f}{E_m}$. Les résultats sont fournis ci-dessous pour quatre valeurs de contraste distinctes : $[c = 100, 1000, 5000, 10000]$.

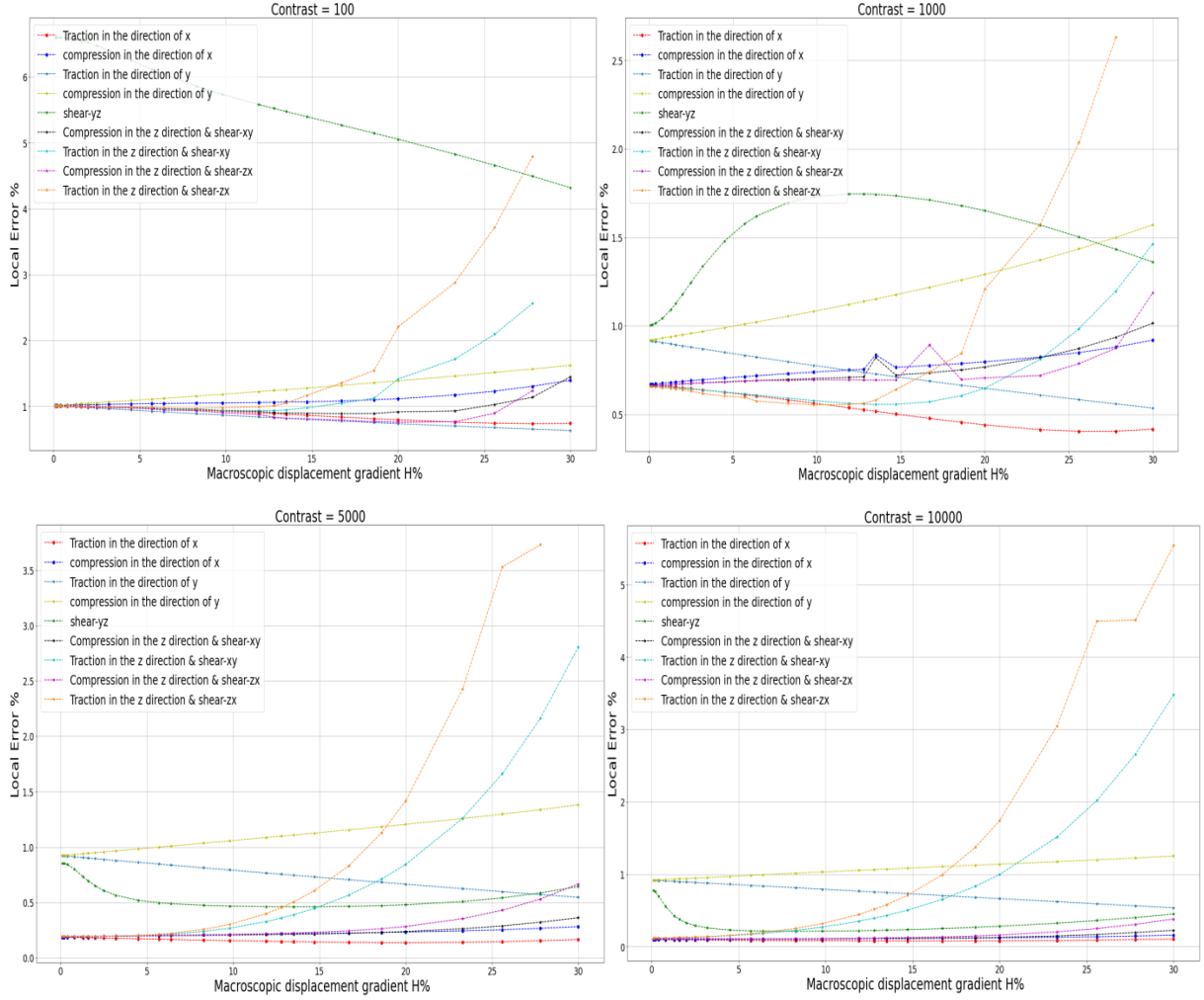


Fig.3. Erreur locale pour le modèle orthotrope de Kaliske modifié

La Fig.3 présente les erreurs locales résultant du processus d'optimisation avec des contraintes de positivité imposée aux coefficients. On constate que pour des valeurs de contraste élevées, l'erreur locale est inférieure à 5 %, ce qui signifie une meilleure précision d'approximation. De plus, ces résultats ne sont pas compromis par de grandes déformations, car on n'observe aucune dégradation de la performance de l'approximation dans de telles conditions.

3.3.2. Modèle asymétrie en traction/compression.

De nombreux modèles constitutifs phénoménologiques ont été proposés pour les matériaux caoutchouteux renforcés de fibres. Comme cela a été postulé par plusieurs auteurs [5-6], nous supposons qu'un matériau caoutchouteux renforcé de fibres peut être modélisé comme étant transversalement isotrope et hyperélastique, avec la direction des fibres comme axe d'anisotropie transverse. En utilisant le principe d'objectivité et de symétrie du matériau, Ericksen et Rivlin [7] ont montré que la densité d'énergie de déformation pour ces matériaux est au maximum une fonction de cinq invariants du tenseur de déformation. Nous rappelons que les fibres de renforcement présentent généralement une réponse différente en tension et en compression.

Dans cette partie nous procéderons à une comparaison de l'approximation de potentiel proposé par Qian Li, David A. Dillard [8] pour les matériaux hyperélastiques quasi-incompressibles en calculant l'erreur entre le deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff homogène (potentiel) et celui hétérogène (des caractéristiques Fibre/Matrice). La fibre est représentée par une loi hyperélastique anisotrope et la matrice est représentée par une loi hyperélastique isotrope de Mooney-Rivlin.

Dans notre cas les fibres sont parfaitement alignées et donc le critère de transition entre traction et compression est direct, En conséquence nous postulons l'équation (4) pour W :

$$\begin{cases} W = D_0(J^2 - 1) + a(\bar{I}_1 - 3) + b(\bar{I}_2 - 3) & ; I_4 < 1 \\ W = D_0(J^2 - 1) + a(\bar{I}_1 - 3) + b(\bar{I}_2 - 3) + c(I_4 - 1)^2 + d(I_5 - 1)^2 & ; I_4 \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

Les constantes a, b, c, d et D_0 sont des valeurs à identifier en utilisant la méthode SLSQP avec des contraintes de positivité. L'équation (4) implique que la compression des fibres ne contribue pas à la fonction de densité d'énergie de déformation donc dans ce cas W_{fib} est :

$$W_{fib}(I_4 - 1) = c(I_4 - 1)^2 + d(I_5 - 1)^2 \quad (5)$$

On utilisant \tilde{H} une fonction de Heaviside et $A = [1, 0, 0]$ est le vecteur unitaire dans la direction des fibres, la contrainte de Piola-Kirchhoff $S = 2 \frac{\partial W_{fib}}{\partial C}$ associée à W_{fib} est donnée par :

$$S_{fib} = 4 \tilde{H}(I_4 - 1) [c(I_4 - 1)(A \otimes A) + d(I_5 - 1)(A(C \otimes A) + (C \otimes A)A)] \quad (6)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} \tilde{H}(I_4 - 1) = 0 & ; I_4 \leq 1 \\ \tilde{H}(I_4 - 1) = 1 & ; I_4 > 1 \end{cases}$$

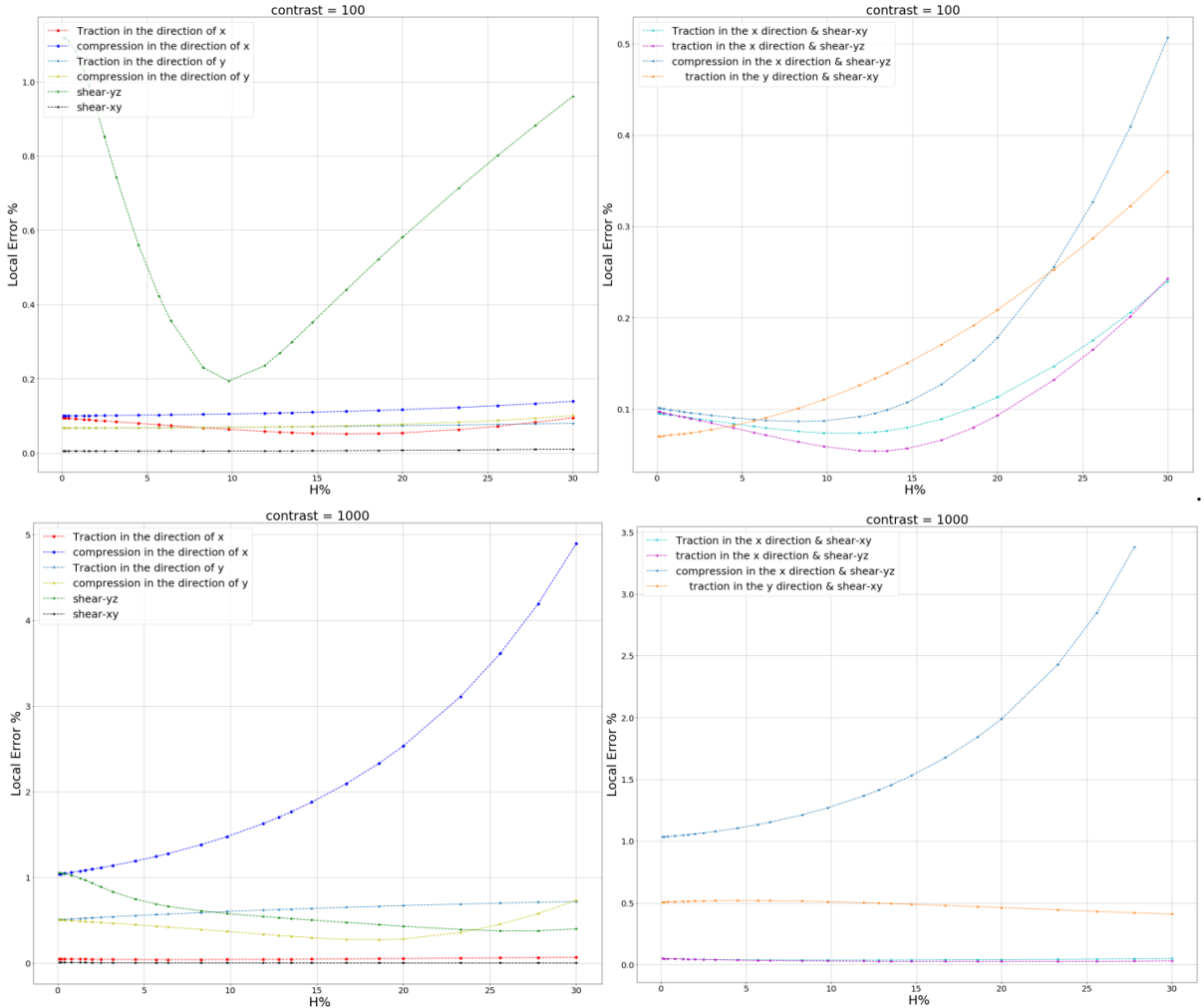


Fig.4 Erreur locale pour le modèle isotrope transverse avec asymétrie en traction/compression.

L'hypothèse de découplage de ce modèle hyperélastique est motivée par des arguments physiques issus du comportement anisotrope des fibres et isotropes de la matrice. À de petites déformations, les fibres, qui sont plus rigides que la matrice, sont moins actives, et le comportement est donc dominé par la partie de l'énergie de déformation isotrope. À de grandes déformations en

traction (les fibres ne travaillent pas en compression), les fibres entrent en jeu, et la partie de l'énergie de déformation anisotrope pilote le comportement mécanique.

Après identification, les erreurs locales sont présentées dans la figure 4 pour six configurations de déformation sélectionnées de la table 1 et quatre autres configurations mixtes additionnelles. L'erreur locale maximale est d'environ 2 % Pour toutes les plages de déformation et toutes les valeurs de contraste à l'exception du mode de sollicitation en compression dans la direction des fibres (compression x), où une erreur atteint 5 % avec des valeurs de contraste élevées.

Remerciements

Le présent travail est réalisé dans le cadre d'une collaboration scientifique avec La Manufacture Française des Pneumatiques MICHELIN. Il a également bénéficié d'un soutien financier de l'Université Tunis El Manar, du programme "PHC Utique" du Ministère français des Affaires étrangères et du Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation de France, ainsi que du Ministère tunisien de l'Enseignement supérieur et de la Recherche scientifique dans le cadre du projet CMCU numéro 22G1123.

Références

- [1] Terada K. , Kato J. , Hirayama N. , Inugai T. , Yamamoto. K. A method of two-scale analysis with micromacro decoupling scheme : application to hyperelastic composite materials, *Computational Mechanics*, Vol.52, pp.1199-1219, 2013.
- [2] Karoui S., Mansouri K., Renard Y., Arfaoui M., Numerical homogenization of fiber reinforced layer in large elastic deformation using a decoupled iterative method, *Computational Mechanics*, Vol.52, pp.1199-1219, 2013.
- [3] Hill, R. On constitutive macro-variables for heterogeneous solids at finite strain. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 326, 131–147, 1972.
- [4] Lopez Jimenez . F. Fibrous connective tissues Variations in the distribution of local strain energy within different realizations of a representative volume element, *Composite Part B*, 2019.
- [5] Spencer, A. J. M., *Constitutive Theory of Strongly Anisotropic Solids*, in Spencer, A. J. M. (ed.), *Continuum Theory of the Mechanics of Fiber-Reinforced Composites*, Springer, Vienna, pp. 1–32,1984.
- [6] Peng, X. Q., Guo, Z. Y., and Moran, B., An Anisotropic Hyperelastic Constitutive Model with Fiber-Matrix Shear Interaction for the Human Annulus Fibrosus, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 73, pp. 815–824,2006.
- [7] Ericksen, J. L. and Rivlin, R. S., *Large Elastic Deformations of Homogeneous Anisotropic Materials*, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 3, pp. 281–301, 1954.
- [8] Qian Li, David A. Dillard, and Romesh C. Batra, *Constitutive Relation for Large Deformations of Fiber-Reinforced Rubberlike Materials with Different Response in Tension and Compression*, *Tire Science and Technology*, TSTCA, Vol. 44, No. 1, pp. 51–72, January– March 2016, pp. 51–72.