

Propagation d'ondes dans les milieux non-bornés à l'aide de PMLs isogéométriques hybrides asynchrones de second-ordre

M. Brun¹, A-K. Chau¹, P. Ventura¹

¹ LEM3, Université de Lorraine, {michael.brun,anh-khoa.chau,pascal.ventura}@univ-lorraine.fr

Résumé — Dans ce travail, la formulation de PMLs ou *Perfectly Matched Layers* discrétisée, en espace, suivant la méthode Isogéométrique, et en temps, suivant la méthode Hétérogène Asynchrone [1] est améliorée en reformulant l'intégration temporelle de la PML proposée par Basu *et al.* [2, 3, 4, 5]. Les forces internes dans la PML sont à présent intégrées suivant un schéma temporel du second-ordre, plutôt que via des formules du premier ordre dans la version originale, permettant ainsi de réduire les erreurs numériques pour des problèmes de propagation d'ondes. L'énergie restante dans le domaine d'intérêt est divisée par un facteur de 10 après le passage des différents trains d'ondes dans les PMLs.

Mots clés — Isogeometric analysis, Perfectly Matched Layer, Mortar method, Heterogenous Asynchronous Time Integrator, Time-domain elastic wave propagation.

1 Introduction

Les PMLs ou *Perfectly Matched Layers* constituent une technique efficace pour modéliser la propagation d'ondes dans des milieux non bornés [6]. Le milieu borné est alors entouré de couches absorbantes, les PMLs, permettant de dissiper complètement les ondes incidentes sans réflexion parasite à l'interface du fait du caractère parfaitement adapté de la PML, et ceci quelques soient les angles d'incidence et les fréquences. Cette propriété remarquable en formulation forte est légèrement dégradée lorsque l'on considère la formulation discrète. Une grande variété de formulations pour les PMLs est disponible dans la littérature [7, 8, 9]. Dans ce travail, nous nous intéressons à une formulation proposée par Basu *et al.* [2, 3, 4, 5], implémentée dans les codes industriels LS-DYNA [10] et DIANA [11]. La PML est basée sur une formulation non-décomposée à l'interface, exprimée en déplacements aux noeuds du maillage, sans terme de convolution mais nécessitant des quantités additionnelles aux points de Gauss comme les intégrales en temps des déformations et des contraintes. Par rapport aux récentes formulations de PML [8, 9, 12, 7] qui utilisent une formulation non-décomposée à l'interface, mixte, c'est-à-dire exprimée en déplacements et contraintes aux noeuds, l'avantage principal de la PML de Basu *et al.* réside dans le fait que la formulation reste en déplacements aux noeuds. Cet avantage est particulièrement important dans la perspective de ce travail qui s'intéresse à l'intégration temporelle hétérogène multi-pas de temps HATI (*Heterogeneous Asynchronous Time Integrator*, [13, 14]), dont l'objectif est de pouvoir traiter de façon différenciée en espace et en temps les PMLs par rapport au domaine physique intérieur. Ainsi des PMLs hybrides asynchrones ont été proposées en 2D et 3D dans [15, 16] en utilisant une discrétisation spatiale classique, sur la base d'éléments finis linéaires. Plus récemment, les PMLs hybrides asynchrones ont été étendues au cas de la discrétisation Isogéométrique (IGA, *Isogeometric Analysis*), en jouant sur le degré des B-splines dans l'objectif de reproduire les forts gradients d'amortissement présents dans l'épaisseur des PMLs ([1]). L'utilisation de l'IGA permet d'améliorer sensiblement la précision de la PML, et donc de réduire les temps de calcul pour une précision donnée par rapport aux éléments finis. Néanmoins, la discrétisation temporelle proposée par Basu *et al.* introduit des intégrations temporelles du premier ordre qui détériore la performance des PMLs lorsque le pas de temps est augmentée. Par conséquent, l'objectif de ce papier est de proposer une nouvelle formulation temporelle, du second-ordre, qui permet de profiter des avantages de la technique HATI en adoptant des pas de temps plus grands dans les PMLs. Le milieu intérieur est quant à lui intégré en temps suivant un schéma classique explicite du second-ordre avec un pas de temps fin vérifiant la condition de stabilité CFL.

2 Méthodes

2.1 Formulation forte de la PML en 2D

La formulation forte du modèle PML adopte l'approche développée par Basu ([2, 3, 4, 5]). La PML est construite à partir des équations classiques de l'élastodynamique en introduisant les *stretching functions* à valeurs complexes notées λ_i . Dans le contexte de l'élastodynamique 2D, les coordonnées réelles x_i sont remplacées par les coordonnées complexes $\tilde{x}_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$ comme suit :

$$\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_i} = \lambda_i(x_i) = 1 + f_i^e(x_i) + \frac{f_i^p(x_i)}{i\omega}. \quad (1)$$

Les fonctions réelles positives f_i^e et f_i^p s'annulent à l'interface entre la PML et le domaine physique, de sorte que la PML s'ajuste parfaitement au domaine physique. La fonction d'amortissement f_i^p sert à atténuer les ondes se propageant dans la direction x_i , tandis que la fonction de mise à l'échelle f_i^e atténue les ondes évanescentes.

A partir des *stretching functions*, la forme forte de l'équation du mouvement pour un milieu isotrope homogène 2D est tout d'abord définie dans le domaine fréquentiel puis, grâce à l'application de la transformée de Fourier inverse, est exprimée dans le domaine temporel :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \tilde{\mathbf{F}}^e + \boldsymbol{\Sigma} \tilde{\mathbf{F}}^p) = \rho f_m \ddot{\mathbf{u}} + \rho f_c \dot{\mathbf{u}} + \rho f_k \mathbf{u} & \text{dans } \Omega_{PML} \times J, \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} & \text{dans } \Omega_{PML} \times J, \\ \mathbf{F}^{eT} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{F}^e + \mathbf{F}^{pT} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{F}^e + \mathbf{F}^{eT} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{F}^p + \mathbf{F}^{eT} \mathbf{E} \mathbf{F}^p = \dots \\ \frac{1}{2} (\nabla \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{F}^e + \mathbf{F}^{eT} \nabla \dot{\mathbf{u}}) + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^T \mathbf{F}^p + \mathbf{F}^{pT} \nabla \mathbf{u}) & \text{dans } \Omega_{PML} \times J, \end{cases} \quad (2)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_{PML}^D, \\ (\boldsymbol{\sigma} \tilde{\mathbf{F}}^e + \boldsymbol{\Sigma} \tilde{\mathbf{F}}^p) \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{PML}^N, \end{cases} \quad (3)$$

L'équation (2) donne la forme forte de l'équation des ondes dans PML : la première équation est l'équation du mouvement, la seconde la relation de comportement inchangée par rapport au comportement élastique classique d'un milieu continu isotrope et la dernière est la relation qui lie les déplacements aux déformations. Les matrices \mathbf{F}^e , $\tilde{\mathbf{F}}^e$, \mathbf{F}^p et $\tilde{\mathbf{F}}^p$ dans les équations (2) et (3) dépendent des fonctions f_i^e et f_i^p [3]. Les tenseurs $\boldsymbol{\Sigma}$ et \mathbf{E} , qui apparaissent dans la première et la troisième équation de l'équation (2) sont les intégrales temporelles des tenseurs de contrainte et de déformation :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \int_0^t \boldsymbol{\sigma} dt, \quad \mathbf{E} = \int_0^t \boldsymbol{\epsilon} dt. \quad (4)$$

2.2 Formulation faible de la PML en 2D avec une discrétisation spatiale isogéométrique

En utilisant le principe de travaux virtuels et introduisant la fonction de test \mathbf{v} , la forme faible de la PML est exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{PML}} \rho f_m \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega_{PML}} \rho f_c \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega_{PML}} \rho f_k \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} d\Omega + \dots \\ & \int_{\Omega_{PML}} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^e : \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega_{PML}} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p : \boldsymbol{\Sigma} d\Omega = \int_{\Gamma_{PML}^N} \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \tilde{\mathbf{F}}^e + \boldsymbol{\Sigma} \tilde{\mathbf{F}}^p) d\Gamma_{PML}^N \end{aligned} \quad (5)$$

Dans l'équation ci-dessus, les tenseurs de contrainte $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^e$ et $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ dépendent des matrices $\tilde{\mathbf{F}}^e$ et $\tilde{\mathbf{F}}^p$ et sont définis par ([3]) :

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^e = \frac{1}{2} \left((\nabla \mathbf{v}) \tilde{\mathbf{F}}^e + \tilde{\mathbf{F}}^{eT} (\nabla \mathbf{v})^T \right), \\ \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \frac{1}{2} \left((\nabla \mathbf{v}) \tilde{\mathbf{F}}^p + \tilde{\mathbf{F}}^{pT} (\nabla \mathbf{v})^T \right). \end{cases} \quad (6)$$

Le membre de droite de l'équation sous la forme faible (5) s'annule du fait des conditions de Neumann nulles (3). La forme faible de la PML est ensuite obtenue en discrétisant dans l'espace l'équation (5) via

le concept de l'Analyse Isogéométrique. L'approche *patch-wise* est employée : la matrice $\mathbf{R}^{p,q}$ contenant toutes les fonctions de base B-splines au point \mathbf{x} dans l'espace physique est construite pour chaque patch IGA. Dans un patch IGA, le champ de déplacement dans le domaine de la PML peut être approché via les Splines et les valeurs de déplacement aux points de contrôle \mathbf{U} ([17, 18]) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^{p,q}(\mathbf{x}) \mathbf{U}, \quad (7)$$

De cette manière, les trois premiers termes de l'équation (5) sont discrétisés dans l'espace en utilisant l'approximation IGA, fournissant les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité :

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega_{PML}} \rho f_m \mathbf{R}^{p,qT} \mathbf{R}^{p,q} d\Omega, \quad \mathbf{C} = \int_{\Omega_{PML}} \rho f_c \mathbf{R}^{p,qT} \mathbf{R}^{p,q} d\Omega, \quad \mathbf{K} = \int_{\Omega_{PML}} \rho f_k \mathbf{R}^{p,qT} \mathbf{R}^{p,q} d\Omega, \quad (8)$$

Les termes restants dans le membre de gauche de l'équation (5) impliquent des tenseurs de déformation et de contrainte combinés avec les fonctions PML f^e et f^p . Ces termes peuvent s'interpréter comme des termes d'énergie interne supplémentaires. Après discrétisation IGA, ces termes d'énergie conduisent à la définition de la force interne au niveau du patch IGA ([3, 4, 15]) :

$$\mathbf{p}_{int} = \int_{\Omega_{PML}} \tilde{\mathbf{B}}^{eT} \hat{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega + \int_{\Omega_{PML}} \tilde{\mathbf{B}}^{pT} \hat{\boldsymbol{\Sigma}} d\Omega, \quad (9)$$

2.3 Equation discrétisée en temps

En considérant un pas de temps $\Delta t = [t_n; t_{n+1}]$, la force interne peut s'écrire au temps t_{n+1} comme suit :

$$\mathbf{p}_{int,n+1} = \int_{\Omega_{PML}} \tilde{\mathbf{B}}^{eT} \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1} d\Omega + \int_{\Omega_{PML}} \tilde{\mathbf{B}}^{pT} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+1} d\Omega, \quad (10)$$

où \mathbf{D} représente la matrice d'élasticité.

Basu *et al.* ([3, 4]) proposent d'intégrer la troisième équation de l'équation (2) en utilisant une méthode d'Euler :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1} = \frac{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_n}{\Delta t} \quad ; \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+1} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_n + \Delta t \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \quad (11)$$

Cette approche a été validée et implémentée dans les logiciels EF LS-DYNA et DIANA [10, 11]. Néanmoins, elle s'avère peu précise lorsque le pas de temps augmente dans la PML ([15]). En effet, les équations précédentes (11) s'appuient sur une discrétisation temporelle du 1er ordre, qui devient peu précise lorsque de grands pas de temps dans la PML sont adoptés. Dans l'objectif de pouvoir augmenter le pas de temps dans la PML en s'appuyant sur des schémas temporels asynchrones, une version améliorée de la PML est explorée dans la suite.

L'intégration temporelle de la PML est modifiée en utilisant une méthode de second ordre, comme la méthode implicite de Newmark notée dans la suite CAA (*Constant Average Acceleration*). La force interne est tout d'abord exprimée en fonction des déformations et intégrales en temps des déformations :

$$\mathbf{p}_{int,n+1} = \int_{\Omega_{PML}} \tilde{\mathbf{B}}^{eT} \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1} d\Omega + \int_{\Omega_{PML}} \tilde{\mathbf{B}}^{pT} \mathbf{D} \hat{\mathbf{E}}_{n+1} d\Omega, \quad (12)$$

On utilise ensuite les formules d'approximation de Newmark pour lier l'intégrale en temps des déformation, les déformations et les taux de déformations :

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1} &= \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \hat{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}_n + \gamma \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1} \\ \hat{\mathbf{E}}_{n+1} &= \hat{\mathbf{E}}_n + \Delta t \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_n + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \hat{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}_n + 2\beta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1} \end{aligned} \quad (13)$$

où γ et β sont les paramètres de Newmark : $\gamma = 0.5$ et $\beta = 0.25$ pour le schéma implicite de Newmark, inconditionnellement stable.

En substituant l'équation (13) dans la troisième équation de (2), on montre que la dérivée de la déformation au temps t_{n+1} s'exprime par :

$$\hat{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}_{n+1} = \mathbf{B}^e \dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbf{B}^Q \mathbf{U}_{n+1} - \hat{\mathbf{F}}^e \left[\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \hat{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}_n \right] - \hat{\mathbf{F}}^Q \left[\hat{\mathbf{E}}_n + \Delta t \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_n + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \hat{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}_n \right], \quad (14)$$

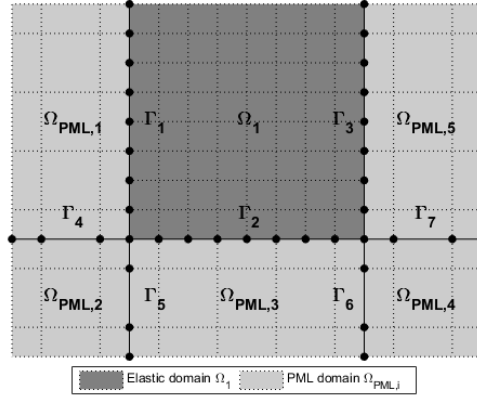


FIGURE 1 – Sous-domaine physique intérieur Ω_1 entouré des sous-domaines PML

où B^ϵ , B^Q , \widehat{F}^ϵ , \widehat{F}^Q sont des matrices qui dépendent de la discrétisation spatiale (ici IGA avec des fonctions B-splines) et des fonctions PML f^ϵ et f^p .

En substituant les équations (14) et (13) dans l'équation (12), la force interne $p_{int,n+1}$ s'écrit à présent en termes de vitesses et de déplacements à la fin du pas de temps, comme cela était le cas pour la formulation de Basu ([1, 15]), complétée par un terme qui prend en compte les quantités précédentes au temps t_n , noté $P(\widehat{\epsilon}_n, \widehat{e}_n, \widehat{E}_n)$.

Le force interne discrétisée en espace et en temps est donnée par :

$$p_{int,n+1} = \widetilde{C}\dot{U}_{n+1} + \widetilde{K}U_{n+1} + P(\widehat{\epsilon}_n, \widehat{e}_n, \widehat{E}_n), \quad (15)$$

où les matrices \widetilde{C} et \widetilde{K} sont données ci-dessous :

$$\widetilde{C} = \int_{\Omega_{PML}} \widetilde{B}^T D \widetilde{B}^\epsilon d\Omega, \quad \widetilde{K} = \int_{\Omega_{PML}} \widetilde{B}^T D \widetilde{B}^Q d\Omega, \quad \widetilde{B} = 0.5\Delta t \widetilde{B}^\epsilon + 0.25\Delta t^2 \widetilde{B}^p \quad (16)$$

En conclusion, sur un patch IGA, l'équation du mouvement discrète en espace (IGA) et en temps pour la PML de second ordre est écrite au temps t_{n+1} comme ci-dessous :

$$M\ddot{U}_{n+1} + (C + \widetilde{C})\dot{U}_{n+1} + (K + \widetilde{K})U_{n+1} + P(\widehat{\epsilon}_n, \widehat{e}_n, \widehat{E}_n) = \mathbf{0}. \quad (17)$$

L'équation de mouvement de la PML (17) est résolu dans la suite en appliquant le schéma d'intégration temporelle de Newmark pour les déplacements, vitesses et accélérations (schéma CAA). Il faut noter que l'intégration temporelle des équations de la PML utilisent deux fois le schéma CAA : une première fois, classiquement pour déterminer les déplacements, vitesses et accélérations, à partir de l'équation du mouvement, et une seconde fois pour lier les intégrales en temps des déformations, les déformations et taux de variation des déformations.

Dans la suite, les performances de la nouvelle IGA-PML sont évaluées en comparant les résultats numériques aux résultats issus de l'IGA-PML récemment proposée dans ([1]).

2.4 Problème de couplage

Le problème de couplage est illustré dans la Figure (1). La région PML est subdivisée en plusieurs sous-domaines rectangulaires, et chaque sous-domaine PML est discretisé à partir d'un patch IGA. Dans ce contexte, le domaine physique est également considéré comme un sous-domaine. Par conséquent, le couplage est mis en place pour connecter les sous-domaines PML les uns aux autres ainsi qu'au sous-domaine physique. Cette décomposition offre la flexibilité de choisir différents paramètres pour la discrétisation IGA (degré des B-splines et nombre de fonctions de forme), ainsi que pour la discrétisation temporelle (pas de temps et schéma d'intégration) des différents sous-domaines. On suppose que le sous-domaine physique Ω_1 est linéaire élastique, caractérisé par la densité ρ_1 et les coefficients de Lamé λ_1 et μ_1 . E_1 et ν_1 sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson. La forme forte du

mouvement du sous-domaine s'écrit :

$$\begin{cases} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}_1) + \mathbf{b}_1 = \rho_1 \ddot{\mathbf{u}}_1 \text{ in } \Omega_1 \times J, \\ \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{C}_1 : \boldsymbol{\epsilon}_1 \text{ in } \Omega_1 \times J, \\ \boldsymbol{\epsilon}_1 = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u}_1 + \nabla \mathbf{u}_1^T] \text{ in } \Omega_1 \times J, \end{cases} \quad \text{conditions aux limites : } \begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1^D \text{ on } \Gamma_1^D \times J, \\ (\boldsymbol{\sigma}_1) \mathbf{n}_1 = \mathbf{g}_1^N \text{ on } \Gamma_1^N \times J, \end{cases} \quad (18)$$

Sur chaque interface, noté Γ_k pour $k = 1, 2, \dots, N_\Gamma$, entre les patches IGA, nous imposons la continuité des vitesses de la manière suivante :

$$\dot{\mathbf{u}}_{S_k} = \dot{\mathbf{u}}_{M_k} \text{ sur } \Gamma_k \times J, \quad (19)$$

où l'interface Γ_k concerne deux sous-domaines notés Ω_{S_k} et Ω_{M_k} , les indices S_k et M_k désignant respectivement les sous-domaines esclave et maître, Ω_{S_k} et Ω_{M_k} pouvant être des sous-domaines physiques (milieux élastique linéaires) ou des PMLs.

Le couplage entre le sous-domaine Ω_1 (domaine physique) et les PMLs $\Omega_{PML,p}$ est assuré via des forces d'interface correspondant à des multiplicateurs de Lagrange selon une méthode de Schur duale : les multiplicateurs de Lagrange sont introduits afin de garantir la continuité cinématique à l'interface Γ_k et de fournir les forces d'interface. En introduisant le champ de multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}_k$ et sa fonction associée $\boldsymbol{\mu}_k$ correspondant à l'interface Γ_k , la formulation faible du problème dynamique couplant les sous-domaines est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta W^{cin,1} + \delta W^{int,1} + \sum_{p=1}^{N_{PML}} \delta W^{PML,p} = \delta W^{ext,1} + \dots \\ \sum_{k=1}^{N_\Gamma} \int_{\Gamma_k} \boldsymbol{\mu}_k \cdot (\dot{\mathbf{u}}_{S_k} - \dot{\mathbf{u}}_{M_k}) d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_\Gamma} \int_{\Gamma_k} \boldsymbol{\lambda}_k \cdot (\mathbf{v}_{S_k} - \mathbf{v}_{M_k}) d\Gamma. \end{aligned} \quad (20)$$

Dans la forme faible (20), le terme $\sum_{k=1}^{N_\Gamma} \int_{\Gamma_k} \boldsymbol{\mu}_k \cdot (\dot{\mathbf{u}}_{S_k} - \dot{\mathbf{u}}_{M_k}) d\Gamma$ est lié à la contrainte cinématique imposée via les multiplicateurs de Lagrange et le terme $\sum_{k=1}^{N_\Gamma} \int_{\Gamma_k} \boldsymbol{\lambda}_k \cdot (\mathbf{v}_{S_k} - \mathbf{v}_{M_k}) d\Gamma$ fournit l'énergie virtuelle d'interface provenant des multiplicateurs de Lagrange. En discretisant par la méthode IGA, nous pouvons écrire la continuité des vitesses à l'interface :

$$\mathbf{L}_{S_k} \dot{\mathbf{U}}_{S_k} + \mathbf{L}_{M_k} \dot{\mathbf{U}}_{M_k} = \mathbf{0}, \quad (21)$$

et le travail virtuel de la force d'interface Γ_k s'exprime par :

$$\delta W_{interface,k} = (\mathbf{V}_{S_k})^T (\mathbf{L}_{S_k})^T \boldsymbol{\lambda}_k + (\mathbf{V}_{M_k})^T (\mathbf{L}_{M_k})^T \boldsymbol{\lambda}_k. \quad (22)$$

où \mathbf{V}_{S_k} et \mathbf{V}_{M_k} sont les vecteurs vitesses virtuelles des deux sous-domaines adjacents Ω_{S_k} et Ω_{M_k} , et \mathbf{L}_{S_k} et \mathbf{L}_{M_k} sont les matrices de couplage de Mortar, données par :

$$(\mathbf{L}_{S_k})_{ij} = \int_{\Gamma_k} \mathbf{R}_i^{S_k} \mathbf{R}_j^{S_k} d\Gamma, \quad (\mathbf{L}_{M_k})_{ij} = \int_{\Gamma_k} \mathbf{R}_i^{M_k} \mathbf{R}_j^{M_k} d\Gamma. \quad (23)$$

En termes de discretization temporelle, nous employons la technique HATI [13, 14] qui permet d'intégrer dans le temps les sous-domaines de manière indépendante, avec leurs propres paramètres de Newmark et leur propre pas de temps. Le schéma de la Différence Centrée (*Central Difference*, noté CD), caractérisé par $\gamma_1 = 0.5$ et $\beta_1 = 0$, avec un petit pas de temps Δt_1 satisfaisant la condition CFL pour le sous-domaine physique, et le schéma CAA, caractérisé par $\gamma_{PML,p} = 0.5$ et $\beta_{PML,p} = 0.25$ avec un grand pas de temps $\Delta t_2 = m\Delta t_1$ ($m = 1, 2, \dots$) pour les sous-domaines PML. Concernant la continuité des vitesses aux interfaces, la condition (21) est imposée à la fin de chaque petit pas de temps. Finalement, la forme complète discrétisée en espace et en temps de l'équation (20) est donnée ci-dessous :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{U}}_1^j + \mathbf{K}_1 \mathbf{U}_1^j = \mathbf{F}_{ext,1}^j + \sum_{k=1}^{N_{S_1}} (\mathbf{L}_k^T) \boldsymbol{\lambda}_k^j, & \text{with } j = 1, 2, \dots, m \\ \mathbf{M}_p^m \ddot{\mathbf{U}}_p^m + (\mathbf{C}_p + \tilde{\mathbf{C}}_p) \dot{\mathbf{U}}_p^m + (\mathbf{K}_p + \tilde{\mathbf{K}}_p) \mathbf{U}_p^m + \mathbf{P}_p^m = \dots \\ \sum_{k=1}^{N_{PML,p}} (\mathbf{L}_k)^T \boldsymbol{\lambda}_k^m & \text{for } p = 1, 2, \dots, N_{PML}, \\ \mathbf{L}_{S_k}^j \dot{\mathbf{U}}_{S_k}^j + \mathbf{L}_{M_k}^j \dot{\mathbf{U}}_{M_k}^j = \mathbf{0} & \text{for } k = 1, 2, \dots, N_\Gamma. \end{cases} \quad (24)$$

Le système (24) est résolu en appliquant la prodédure HATI ([13, 14]).

3 Application numérique

L'application numérique présentée dans ce travail concerne le test de Lamb illustré dans la Figure (2). Le test de Lamb implique la propagation d'ondes de volume dans le sol et d'une forte onde de Rayleigh qui se propage à la surface du sol. Le milieu est semi-infini. On suppose que le sol est linéaire élastique isotrope, sans amortissement. Une charge concentrée, de type onde de Ricker, est appliquée à la surface du sol. L'onde de Ricker, notée Ric , est définie par :

$$Ric(t, t_p, t_s) = A \left(2\pi^2 \frac{(t - t_s)^2}{t_p^2} - 1 \right) \exp\left(-\pi^2 \frac{(t - t_s)^2}{t_p^2}\right). \quad (25)$$

où $t_p = 3s$ désigne la période fondamentale, $t_s = 3s$ le décalage temporel et $A = 1MN$ l'amplitude. En terme de discretisation spatiale, les sous-domaines du sol (domaine intérieur et PMLs) sont discrétisés en utilisant une formulation IGA caractérisée par des B-splines de degrés égaux dans les deux directions de l'espace $p = q$. Les PMLs sont discrétisées en utilisant des B-splines de degrés $p = q = 5$ et le milieu d'intérêt (intérieur) utilise des fonctions de forme linéaires ($p = q = 1$).

L'objectif de ces tests est de comparer la performance de la PML-IGA de second ordre par rapport à la PML-IGA de premier ordre ([1]), dans le contexte de la simulation de multi-échelle temporelle.

Trois calculs sont effectués :

- le calcul explicite complet dans lequel le domaine physique (intérieur) est intégré avec le schéma d'intégration temporelle explicite (CD), en considérant un maillage étendu (trois fois plus grand que le domaine physique dans chaque direction) afin de fournir les résultats de référence avec le pas de temps Δt_1 satisfaisant la condition CFL.
- le domaine physique est intégré avec un schéma explicite (CD) avec un pas de temps fin Δt_1 satisfaisant la condition CFL, tandis que le domaine PML est intégré avec un schéma implicite (CAA) avec un pas de temps plus grand Δt_2 , en utilisant la stratégie de Basu ([1]). Nous définissons le rapport des pas de temps à l'aide de $m = \Delta t_2 / \Delta t_1$.
- le domaine physique est intégré avec un schéma explicite (CD) avec un pas de temps fin Δt_1 satisfaisant la condition CFL, tandis que le domaine PML est intégré avec un schéma implicite (CAA) avec un pas de temps plus grand Δt_2 , en utilisant la discrétisation de second ordre proposée dans ce papier.

Les effets sur la précision des résultats des deux calculs PML sont étudiés en introduisant une norme d'erreur entre ces résultats et ceux du calcul explicite de référence avec un maillage étendu. En considérant une quantité E sur l'intervalle de temps $J = [0, T]$, la norme L^2 est définie par :

$$L^2 = \frac{\|E_{PML} - E_{ref}\|_{L^2([0, T])}}{\|E_{ref}\|_{L^2([0, T])}}. \quad (26)$$

Les valeurs de la norme L^2 du déplacement sont calculées pour le déplacement au point C, illustré sur la Figure (2), ainsi que sur les énergies mécaniques dans le domaine intérieur.

Le problème illustré dans la Figure (2) est divisé en 4 sous-domaines : un sous-domaine élastique non dissipatif et trois sous-domaines PML adjacents (dans les régions inférieure, droite et au coin). Le sous-domaine élastique non dissipatif est caractérisé par un module de Young $E = 10^7$ Pa, une densité massique $\rho = 1700 \text{ kg/m}^3$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.24$. Les mêmes paramètres matériels sont choisis pour les sous-domaines PML. Dans ce test, le sous-domaine du sol est intégré dans le temps en utilisant le schéma explicite CD avec un petit pas de temps $\Delta t_1 = 0.025s$ alors que les sous-domaines PML sont intégrés en utilisant le schéma implicite CAA avec un pas de temps plus large $\Delta t_2 = m\Delta t_1$ avec $m = 1, 2, 4, 10$.

La Figure (3) présente les déplacements verticaux et horizontaux au point C, obtenus avec les deux formulations de PML-IGA, avec des degrés de B-spline de 5 ($p = q = 5$), pour un rapport de pas de temps $m = 4$. Il est observé que la formulation proposée améliore la performance de la PML-IGA.

Cela est confirmé dans le Tableau 1. Pour les différents rapport de pas de temps explorés, les normes d'erreur L^2 du déplacement du point C et de l'énergie mécanique sont plus faibles pour la PML de second-ordre. Ce constat est mis davantage en lumière en traçant l'évolution de l'énergie mécanique au cours du temps pour les deux formulations de PML : l'erreur en fin de simulation est divisée par

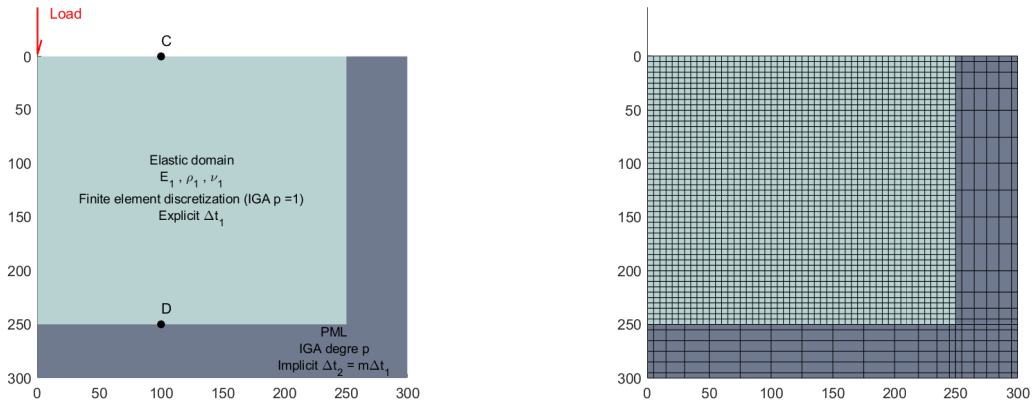


FIGURE 2 – Le test de Lamb décomposé en 1 sous-domaine élastique, modélisé avec des éléments quadrilatéraux linéaires classiques, et 3 sous-domaines PML-IGA (à gauche) avec le réseau des points de contrôle $\mathbf{B}_{i,j}$ visualisé pour le cas $p = q = 5$ (à droite). Le sol est intégré en utilisant un schéma d’intégration temporelle explicite CD tandis que les IGA-PMLs sont intégrées en utilisant un schéma d’intégration temporelle implicite CAA.

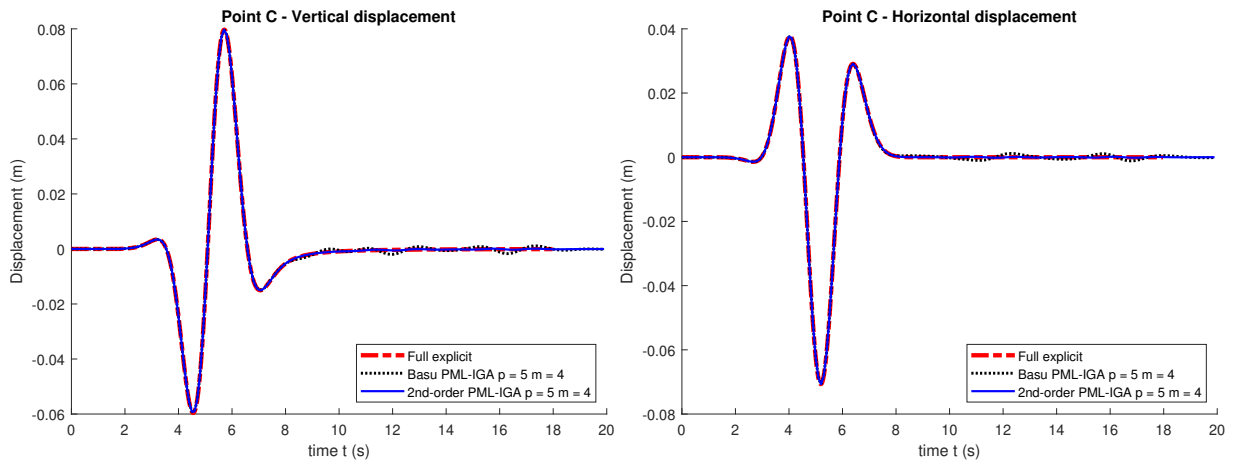


FIGURE 3 – Déplacements verticaux et horizontaux au point C, en utilisant la PML de Basu et la PML de second ordre ($p = q = 5$, $\Delta t_1 = 0.025s$, $\Delta t_2 = 4\Delta t_1$, rapport de pas de temps $m = 4$), comparés aux résultats de référence obtenus avec une intégration explicite complète sur un maillage étendu (résultats de référence tronqués à $t = 18s$)

10 grâce à la nouvelle formulation de l’IGA-PML. Un point particulièrement intéressant en faveur de la formulation de second-ordre est la performance de l’IGA-PML pour des rapports de pas de temps $m = 4$ en termes d’énergie mécanique restante. La PML de Basu exhibe une claire dégradation des performances de l’IGA-PML en termes d’énergie mécanique, lorsque l’on passe de $m = 1$ à $m = 4$, ce qui n’est pas constatée pour l’IGA-PML proposée. Par contre, l’IGA-PML de second-ordre se dégrade pour $m = 10$, tout en restant bien plus précise que la version originale du premier-ordre.

4 Conclusion

Une version plus précise de PML est proposée, sur la base des développements récents mêlant la discrétisation spatiale via la méthode IGA avec des B-splines de degrés élevés ($p = q = 5$) pour capturer les forts gradients d’amortissement dans l’épaisseur de la PML et l’intégration temporelle hétérogène asynchrone HATI. En particulier, la force interne intervenant dans la formulation discrète de la PML est modifiée en utilisant un schéma temporel au deuxième ordre pour lier les intégrales en temps des déformations, les déformations et les taux de déformations. Le test de Lamb met en lumière une nette

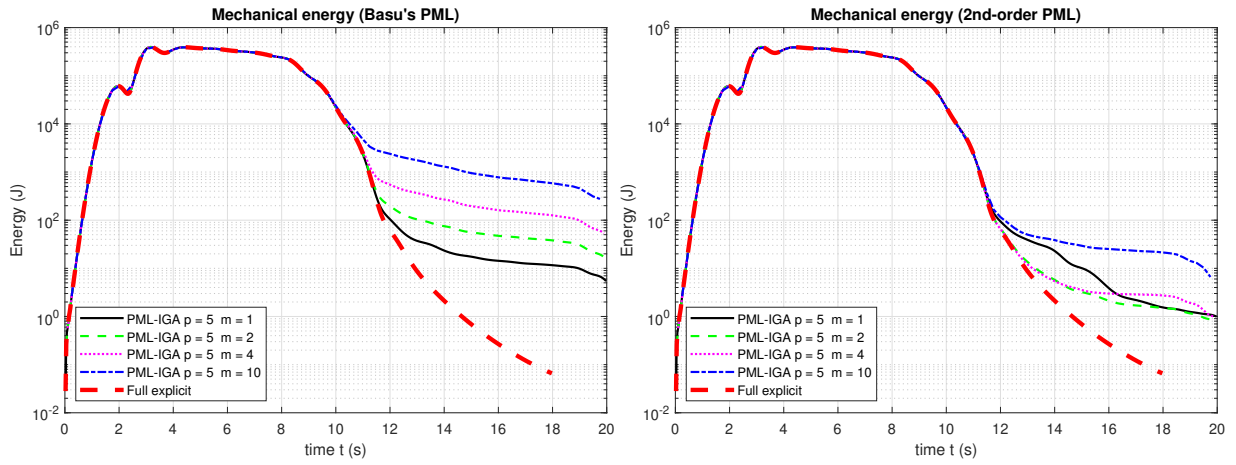


FIGURE 4 – Énergies mécaniques du domaine élastique calculées, en utilisant le PML de Basu et la PML second ordre ($p = q = 5$ et $p = q = 1$, $\Delta t_1 = 0.025s$, $\Delta t_2 = m\Delta t_1$, rapport du de temps $m = 1, 2, 4, 10$), comparées aux résultats de référence obtenus avec une intégration explicite complète sur un maillage étendu (résultats de référence tronqués à $t = 18s$)

Time step ratio	$m = 1$	$m = 2$	$m = 4$	$m = 10$
IGA-PML de Basu				
L^2 du déplacement (%)	0.92	1.67	3.01	6.73
L^2 de l'énergie (%)	0.11	0.23	0.57	2.55
Normalized computational time	1.00	0.67	0.49	0.33
IGA-PML second d'ordre				
L^2 du déplacement (%)	0.42	0.34	0.68	3.59
L^2 de l'énergie (%)	0.03	0.10	0.38	2.32
Normalized computational time	1.44	0.84	0.54	0.37

TABLE 1 – Normes d'erreur L^2 sur l'intervalle de temps $J = [0, 18s]$ pour le déplacement au point C et les énergies mécaniques, obtenus à partir du calcul hybride multi pas de temps avec la PML de Basu et la PML de second ordre pour différents rapports de pas de temps m .

amélioration des performances de la PML-IGA hybride asynchrone. Des tests de propagations d'ondes avec des milieux hétérogènes sont en cours pour mieux cerner les performances de cette nouvelle version de PML. Le problèmes d'instabilité au temps long rencontrés par les PMLs en 2D et 3D, et largement relevés dans la littérature, seront aussi explorés pour cette nouvelle version de PML-IGA hybride asynchrone.

Références

- [1] A-K Chau, M. Brun, and T. Elguedj. Hybrid asynchronous isogeometric perfectly matched layer for transient elastodynamics. *Computers and Geotechnics*, 158 :105387, 2023.
- [2] U. Basu and A.K. Chopra. Perfectly matched layers for time-harmonic elastodynamics of unbounded domains : theory and finite-element implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :1337–1375, 2003.
- [3] U. Basu and A.K. Chopra. Perfectly matched layers for transient elastodynamics of unbounded domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59 :1039–1074, 2004.
- [4] U. Basu and A.K. Chopra. Erratum to : Perfectly matched layers for transient elastodynamics of unbounded domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61 :156–157, 2004.
- [5] U. Basu. Explicit finite element perfectly matched layer for transient three-dimensional elastic waves. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77 :151–176, 2009.
- [6] J. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114 :185–200, 1994.

- [7] F. Pled and C. Desceliers. Review and Recent Developments on the Perfectly Matched Layer (PML) Method for the Numerical Modeling and Simulation of Elastic Wave Propagation in Unbounded Domains. *Arch Computat Methods Eng*, 29 :471–518, 2022.
- [8] S. Kucukcoban and L.F. Kallivokas. A symmetric hybrid formulation for transient wave simulations in PML-truncated heterogeneous media. *Wave Motion*, 50 :57–79, 2013.
- [9] S. Kucukcoban and L.F. Kallivokas. Mixed Perfectly-Matched-Layers for direct transient analysis in 2D elastic heterogeneous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200 :57–76, 2011.
- [10] LS-DYNA. *Recent Developments in LS-DYNA, Version 971-R4 developments*, Livermore Software Technology Corporation, LSTC. 2015.
- [11] DIANA. *User's Manual, Version 10.1, DIANA FEA BV*. 2016.
- [12] A. Fathi, B. Poursartip, and L.K. Kallivokas. Time-domain hybrid formulations for wave simulations in three-dimensional PML-truncated heterogeneous media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 101 :165–198, 2015.
- [13] M. Brun, A. Gravouil, A. Combescure, and A. Limam. Two FETI-based heterogeneous time step coupling methods for Newmark and α -schemes derived from the energy method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 283 :130–176, 2015.
- [14] A. Gravouil, A. Combescure, and M. Brun. Heterogeneous asynchronous time integrators for computational structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 102 :202–232, 2015.
- [15] M. Brun, E. Zafati, I. Djeran-Maigre, and F. Prunier. Hybrid Asynchronous Perfectly Matched layer for seismic wave propagation in unbounded domains. *Finite Elements in Analysis & Design*, 122 :1–15, 2016.
- [16] Sijia Li, M. Brun, I. Djeran-Maigre, and S. Kuznetsov. Benchmark for three-dimensional explicit asynchronous absorbing layers for ground wave propagation and wave barriers. *Computers and Geotechnics*, 131(2021) :103808, 2021.
- [17] T.J.R. Hughes, A. Reali, and G. Sangalli. Duality and unified analysis of discrete approximations in structural dynamics and wave propagation : Comparison of ρ -method finite elements with κ -method NURBS. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 :4104–4124, 2008.
- [18] J.A. Cottrell, T.J.R Hughes, and Y. Bazilevs. *Isogeometric Analysis : Toward Integration of CAD and FEA*. John Wiley & Sons, Ltd, 2009.