

Une approche modulaire basée sur la PGD pour la résolution de problèmes multiphysiques fortement couplés

F. Wurtzer, P.-A. Boucard, D. Néron, P. Ladevèze

*Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay, 91190, Gif-sur-Yvette, France.
{floriane.wurtzer, pierre-alain.boucard, david.neron, pierre.ladeveze}@ens-paris-saclay.fr*

Résumé — La méthode LATIN offre une modularité intéressante pour la simulation de problèmes multiphysiques fortement couplés grâce à la notion d'interface entre physiques, qui permet de traiter les physiques séparément sur tout le domaine espace-temps, tout en assurant le couplage. Dans ce travail, cette interface est exploitée pour étendre la méthode à l'utilisation de modèles de natures différentes pour chaque physique. Le couplage d'un modèle haute fidélité à un modèle réduit PGD, potentiellement pré-calculé, puis enrichi à la volée, est illustré sur un problème de thermoélasticité.

Mots clés — Multiphysique, Multimodèle, Méthode LATIN-PGD, Réduction de modèles

1 Introduction

La majorité des systèmes industriels modernes met en jeu des interactions entre plusieurs phénomènes physiques, par exemple mécaniques, thermiques ou chimiques. Face aux exigences croissantes de précision et de réalisme pour la simulation numérique de ces systèmes complexes, il devient impératif de tenir compte de leur comportement multiphysique. On s'intéresse plus particulièrement aux problèmes multiphysiques couplés en volume, dans lesquels les différentes physiques interagissent à travers les relations de comportement. Un exemple typique est celui du couplage thermomécanique, qui fera l'objet de cette étude.

Dans le cas d'un couplage fort, c'est-à-dire lorsque tous les phénomènes physiques s'influencent mutuellement, des stratégies de résolution dédiées sont nécessaires. On distingue deux approches couramment utilisées pour la simulation numérique de problèmes couplés [9]. La résolution monolithique directe (e.g. [3]) consiste à traiter simultanément tous les phénomènes physiques au sein d'un code spécifique au problème considéré. À l'inverse, les physiques sont traitées l'une après l'autre dans les stratégies de partitionnement (e.g. [7, 12]), avec potentiellement des sous-itérations à chaque pas de temps pour assurer le couplage. Les interactions entre physiques y sont vues comme des chargements imposés.

Ce travail porte sur une stratégie de partitionnement alternative, basée sur le solveur LATIN [11]. Son extension à la résolution de problèmes multiphysiques repose sur le concept d'interface entre physiques [14], qui permet de traiter les physiques de manière découplée sur l'ensemble du domaine espace-temps, puis de les faire communiquer entre elles. C'est ce caractère non-incrémental qui distingue la méthode LATIN pour le multiphysique des approches partitionnées classiques, qui résolvent un pas de temps après l'autre. Il est alors possible d'appliquer la technique de réduction de modèles Proper Generalized Decomposition (PGD) [2] séparément à chaque physique.

Lors de la résolution d'un problème multiphysique, il est essentiel de considérer en premier lieu la manière la plus pertinente de traiter chaque physique. Pour s'adapter aux échelles caractéristiques liées aux phénomènes physiques sous-jacents, des discrétisations différentes peuvent être utilisées comme dans [4, 8] avec des approches classiques, ou encore avec la méthode LATIN pour un problème 2D couplant trois physiques [15]. En plus de revisiter ces travaux antérieurs de manière robuste et dans un cadre 3D, les nouveaux développements présentés ont pour but d'exploiter davantage encore la modularité offerte par l'interface entre physiques en proposant une extension multimodèle à la méthode. En guise d'illustration, un modèle haute fidélité est couplé à un modèle réduit PGD, d'abord construit spécifiquement pour le problème traité, puis pré-calculé sur un problème annexe.

2 Problème multiphysique traité

Décrivons brièvement un problème de thermoélasticité linéaire [13]. Soit une structure occupant un domaine Ω initialement fixé à une température uniforme T_0 , que l'on étudie sur un intervalle de temps I sous les hypothèses de petites perturbations et d'évolution quasi-statique. Cette structure est soumise à une force volumique \underline{f}_d , une source de chaleur volumique r_d , un déplacement \underline{u}_d sur une partie de la frontière Γ_u , un effort \underline{F}_d sur la partie complémentaire de la frontière Γ_F , une température θ_d sur une autre partie de la frontière Γ_θ et un flux de chaleur $-y_d$ sur la partie complémentaire Γ_y (voir Figure 1).

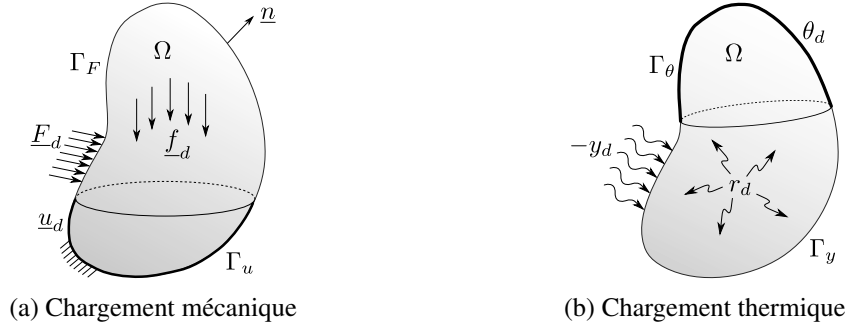


FIGURE 1 – Problème thermomécanique de référence sur le domaine Ω .

Les quantités d'intérêt mécaniques sont les déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et les contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$. En thermique, on s'intéresse à l'incrément de température θ par rapport à T_0 , son gradient \underline{x} , l'opposé de la densité de flux de chaleur \underline{y} et un terme source généralisé R . Notons que le choix des quantités d'intérêt et la formulation des équations qui en découle permettent de vérifier les conditions de convergence de la méthode mise en œuvre, énoncées dans [11]. Le problème de thermoélasticité linéaire consiste donc à trouver $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_M, \mathbf{s}_T)$ sur $\Omega \times I$, avec $\mathbf{s}_M = (\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\sigma}})$ et $\mathbf{s}_T = (\theta, R, \underline{x}, \underline{y})$, vérifiant à tout pas de temps :

— les équations d'admissibilité mécanique :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}} &= \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u} + {}^T \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u} \right) \quad \text{sur } \Omega \quad \text{et} \quad \underline{u} = \underline{u}_d \quad \text{sur } \Gamma_u \\ \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f}_d &= \underline{0} \quad \text{sur } \Omega \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}} \underline{n} = \underline{F}_d \quad \text{sur } \Gamma_F \end{aligned} \quad (1)$$

— les équations d'admissibilité thermique :

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \underline{\underline{\text{grad}}} \theta \quad \text{sur } \Omega \quad \text{et} \quad \theta = \theta_d \quad \text{sur } \Gamma_\theta \\ \underline{\underline{\text{div}}} \underline{y} + r_d &= R \quad \text{sur } \Omega \quad \text{et} \quad \underline{y} \cdot \underline{n} = y_d \quad \text{sur } \Gamma_y \end{aligned} \quad (2)$$

— les relations de comportement couplées, qui s'écrivent dans le cas isotrope linéaire :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{K} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \beta \theta \underline{I} \quad \underline{y} = k \underline{x} \quad R = \rho c \dot{\theta} + \beta T_0 \text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3)$$

avec \mathcal{K} le tenseur d'élasticité, $\beta = \alpha(2\mu + 3\lambda)$ le coefficient de couplage thermoélastique, α le coefficient de dilatation thermique linéaire, λ et μ les coefficients de Lamé, k la conductivité thermique et ρc la capacité thermique volumique.

3 La méthode LATIN-PGD pour les problèmes multiphysiques

La méthode LATIN est un solveur itératif proposé initialement pour traiter des problèmes non-linéaires dépendant du temps [11], mais elle a depuis été étendue – entre autres – à la résolution de problèmes multiphysiques couplés [5]. Dans la présentation qui suit, seules les idées principales sont présentées. La méthode complète a été décrite dans [6] pour les problèmes multiphysiques.

3.1 Solveur itératif LATIN

Le point de départ de la méthode LATIN consiste à séparer les équations du problème en deux groupes. On introduit alors :

- l'espace \mathbf{A}_d des champs vérifiant les équations d'admissibilité linéaires monophysiques, mais globales sur l'espace :

$$\mathbf{A}_d \triangleq \{ \mathbf{s} = (\mathbf{s}_M, \mathbf{s}_T) \mid \mathbf{s}_M \text{ vérifie (1) et } \mathbf{s}_T \text{ vérifie (2)} \},$$

- l'espace Γ des champs satisfaisant les relations de comportement locales, mais potentiellement couplées :

$$\Gamma \triangleq \{ \hat{\mathbf{s}} \mid \hat{\mathbf{s}} \text{ vérifie (3)} \}.$$

L'espace Γ peut être assimilé à une interface entre physiques, à l'image de l'interface entre les domaines solide et fluide d'un problème d'interaction fluide-structure. La particularité de l'interface entre physiques, sur laquelle le comportement couplé doit être vérifié, réside dans le fait qu'elle occupe le domaine Ω entier.

La solution \mathbf{s}_{ex} du problème de référence est donc définie par : $\mathbf{s}_{ex} = \mathbf{A}_d \cap \Gamma$. Pour s'en approcher, la méthode LATIN propose un schéma itératif en deux étapes, illustré en Figure 2. Par l'intermédiaire de deux directions de recherche \mathbf{E}^+ et \mathbf{E}^- , des solutions intermédiaires appartenant alternativement à \mathbf{A}_d et Γ sont construites.

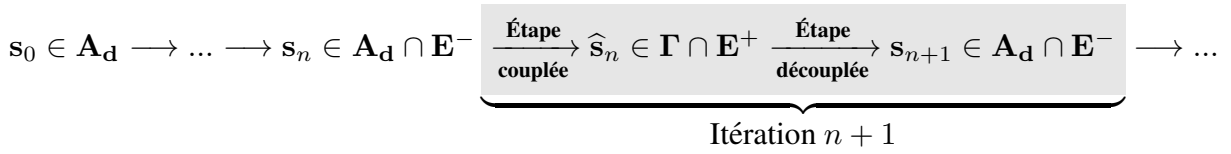


FIGURE 2 – Schéma itératif de la méthode LATIN.

Après une initialisation découplée des champs \mathbf{s}_0 , chaque itération se compose :

- d'une *étape couplée* locale, qui nécessite la résolution d'un système couplé en chaque point de Gauss et à tout pas de temps ;
- d'une *étape découplée* linéaire, qui consiste à résoudre un système linéaire global pour chaque physique.

Par conséquent, les difficultés sont séparées puisqu'on évite de traiter un problème à la fois non-linéaire couplé et global sur l'espace. Les itérations se poursuivent jusqu'à ce qu'un indicateur de convergence, représentant la distance entre deux solutions successives $\hat{\mathbf{s}}$ et \mathbf{s} , soit jugé suffisamment petit.

3.2 Proper Generalized Decomposition (PGD)

La particularité du solveur itératif LATIN consiste à manipuler des solutions intermédiaires définies non seulement sur tout le domaine spatial Ω , mais aussi sur l'intervalle temporel entier I . De plus, lors de l'étape découplée, chaque physique est définie par un problème linéaire indépendant. Il est alors possible d'utiliser la méthode de réduction de modèles Proper Generalized Decomposition (PGD) [2] séparément pour chacun de ces systèmes linéaires.

L'approximation PGD consiste à exprimer le champ solution d'un système linéaire sous une forme à variables espace-temps séparées. Les champs de déplacement \underline{u} et de température θ , définis sur $\Omega \times I$, sont ainsi recherchés sous la forme :

$$\underline{u}(\underline{M}, t) \approx \underline{u}_0(\underline{M}, t) + \sum_{i=0}^{N_u} \lambda_i^u(t) \Lambda_i^u(\underline{M}) \quad (4)$$

$$\theta(\underline{M}, t) \approx \theta_0(\underline{M}, t) + \sum_{i=0}^{N_\theta} \lambda_i^\theta(t) \Lambda_i^\theta(\underline{M}) \quad (5)$$

où \underline{u}_0 et θ_0 sont les champs issus de l'initialisation de l'algorithme LATIN, satisfaisant les conditions aux limites de Dirichlet. Les fonctions de l'espace $\Lambda_i^\square(\underline{M})$ sont générées à la volée en même temps que la solution du problème, à l'aide d'un algorithme glouton, et forment une base réduite de fonctions de l'espace.

Contrairement aux approches construisant simultanément les modèles réduits des champs de déplacement et de température [1], appliquer la PGD séparément aux deux physiques au sein du solveur LATIN permet d'avoir des bases de tailles N_u et N_θ différentes.

4 Une première approche multimodèle

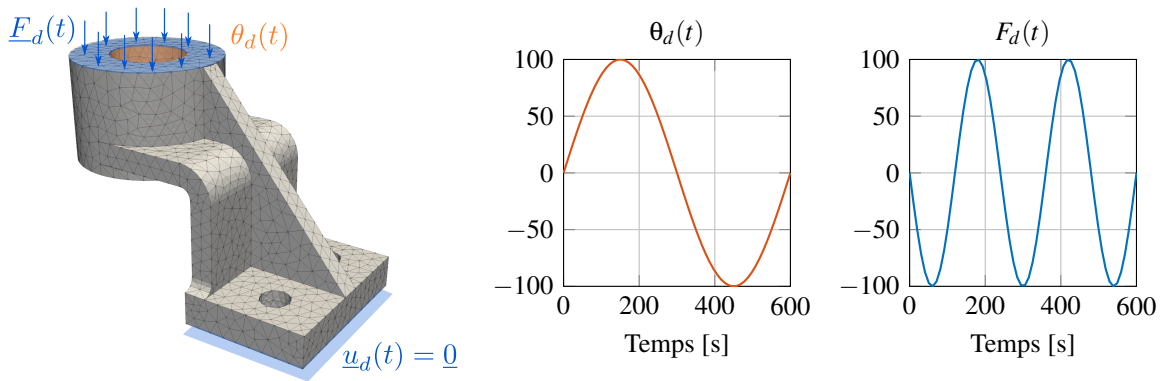
4.1 Rôle de l'interface entre physiques

Puisque les physiques sont traitées indépendamment au cours de l'étape découplée, il est envisageable d'utiliser des discrétisations spatiales ou temporelles différentes pour chacune [14, 15], voire des modèles de natures différentes. Pour ce faire, l'unique condition est de disposer des opérateurs de transfert adéquats pour exprimer toutes les quantités sur l'interface, sur laquelle les équations couplant les deux physiques doivent être satisfaites. Ainsi, l'interface entre physique joue le rôle d'un espace d'accommodation lorsque les physiques sont traitées différemment.

En guise de première approche multimodèle, un modèle réduit obtenu avec la PGD est couplé à un modèle haute fidélité, qui correspond à une résolution directe du système linéaire à l'étape découplée. Dans ce cas, le transfert sur l'interface entre physiques des grandeurs issues du modèle réduit, qui se présentent sous la forme de couples de fonctions du temps et de l'espace, est immédiat puisqu'il suffit d'appliquer la relation (4) ou (5). Notons que la PGD pourrait évidemment être appliquée à la fois à la mécanique et à la thermique durant l'étape découplée. Néanmoins, l'objectif est ici de montrer la faisabilité d'une extension multimodèle de la méthode LATIN appliquée au multiphysique.

4.2 Couplage modèle réduit – modèle haute fidélité

Le cas test est le problème tri-dimensionnel de la Figure 3, maillé avec 5640 éléments tétraédriques. La durée de l'étude est fixée à 600 secondes, discrétisée en 60 pas de temps. Les propriétés du matériau isotrope constituant la structure sont données dans la Tableau 1.



(a) Géométrie avec quantités imposées (b) Température imposée [K] (c) Effort vertical imposé [N]

FIGURE 3 – Géométrie et chargements appliqués pour le cas test considéré.

Module d'Young	$E = 210 \text{ GPa}$	Conductivité thermique	$k = 43 \text{ W/m/K}$
Coef. de Poisson	$\nu = 0,3$	Capacité thermique	$c = 500 \text{ J/kg/K}$
Masse volumique	$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$	Coef. de dilatation linéaire	$\alpha = 11 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$

TABLE 1 – Paramètres matériau de l'acier considéré.

Deux cas de simulation multimodèle sont étudiés :

- **Cas 1** : le problème de thermique est résolu avec un modèle haute fidélité, tandis que la partie mécanique est résolue à l'aide d'un modèle réduit PGD ;
- **Cas 2** : le problème de mécanique est résolu avec un modèle haute fidélité, tandis que la partie thermique est résolue à l'aide d'un modèle réduit PGD.

Afin de mesurer la qualité de la solution obtenue, on introduit l'erreur relative des champs de déplacement \underline{u} et de température θ par rapport aux références $\underline{u}_{\text{ref}}$ et θ_{ref} , issues de la résolution du problème avec la méthode monolithique :

$$e_u = \frac{\|\underline{u} - \underline{u}_{\text{ref}}\|}{\|\underline{u}_{\text{ref}}\|} \quad \text{et} \quad e_\theta = \frac{\|\theta - \theta_{\text{ref}}\|}{\|\theta_{\text{ref}}\|} \quad (6)$$

où $\|\bullet\|$ représente la norme énergétique associée.

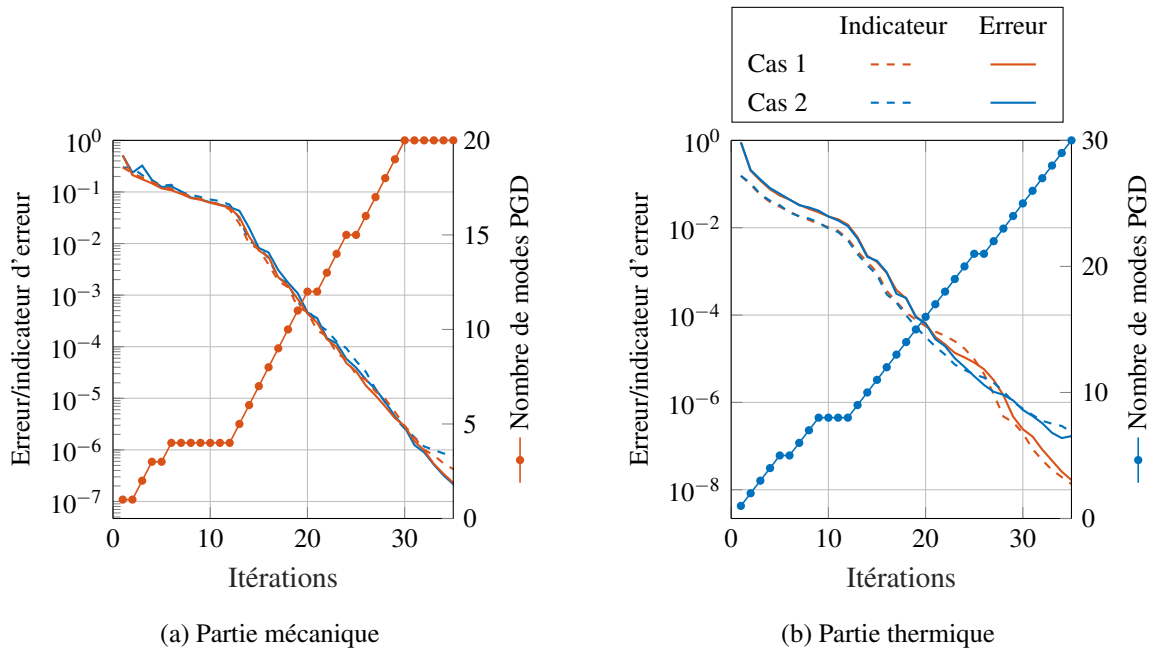


FIGURE 4 – Courbes de convergence lors du couplage d'un modèle réduit PGD avec un modèle haute fidélité.

La Figure 4 représente pour chaque physique l'évolution au fil des itérations de l'erreur par rapport à la référence, de l'indicateur de convergence et du nombre de modes PGD générés (en cas de résolution par PGD). On constate que les deux cas étudiés mènent à des courbes de convergence très similaires. Dans les deux cas, des niveaux d'erreur très satisfaisants sont atteints en un nombre raisonnable d'itérations. Comme on pouvait s'y attendre, l'utilisation d'un modèle réduit pour l'une des physiques n'altère pas la qualité de la solution obtenue. Cela découle du fait que les modes de ce modèle réduit sont construits à partir des équations du problème et sont donc adaptés au problème traité.

4.3 Réutilisation et enrichissement d'un modèle réduit

On se focalise à présent sur le scénario dans lequel un modèle haute fidélité est employé pour la partie mécanique, tandis que la thermique est résolue avec la PGD. Contrairement à la section précédente où le modèle réduit PGD était généré à la volée, spécifiquement pour le problème traité, on cherche ici à réutiliser une base réduite déjà existante. En effet, bien que l'algorithme PGD ne nécessite pas d'information préalable pour construire un modèle réduit, il reste tout à fait possible d'initialiser la stratégie avec une solution pré-calculée pour résoudre un nouveau problème (voir [10] pour des problèmes paramétriques).

On considère un barreau 3D de longueur $L = 0,4\text{m}$, à section carrée de côté 50mm, constitué du matériau décrit dans le Tableau 1. Les deux cas de chargement considérés sont décrits en Figure 5.

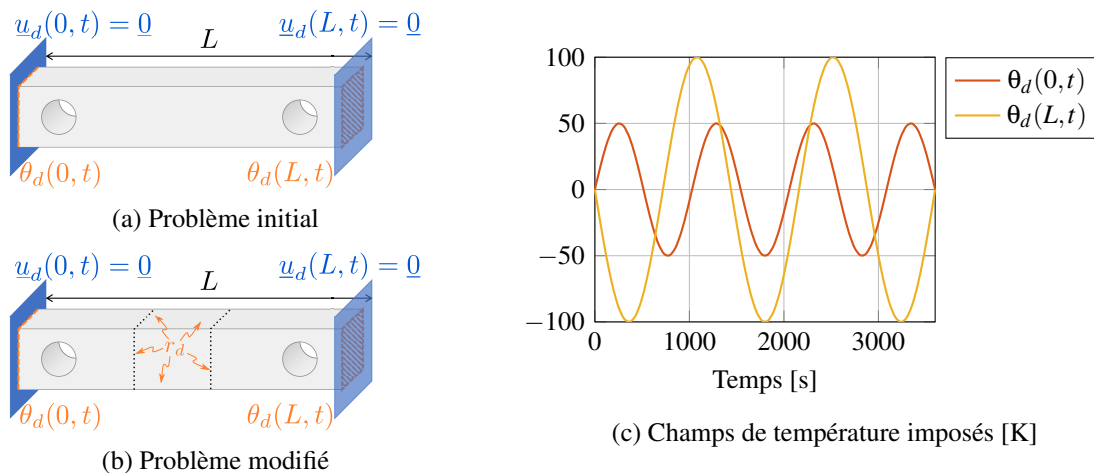


FIGURE 5 – Géométrie du cas test avec deux cas de chargement.

La résolution du problème initial (Figure 5a) a permis de générer une base de modes spatiaux $\{\underline{\Delta}_i\}_i$ pour la partie thermique, adaptée à ce premier problème. Comme on le ferait avec une approche de type POD, il est possible de réutiliser cette base dont nous disposons déjà afin de résoudre un nouveau problème. Il s'agira alors de trouver les meilleures fonctions du temps pour pondérer les fonctions de l'espace données. Le problème modifié considéré correspond au problème initial auquel on ajoute une source de chaleur $r_d = 5 \times 10^5 \text{ W/m}^3$, localisée sur un tronçon de longueur $\frac{L}{5}$ (voir Figure 5b).

La Figure 6 compare, pour la partie thermique, la convergence et le nombre de modes PGD pour différentes manières de résoudre ce problème modifié. On constate sur la Figure 6 à gauche que la réutilisation de la base pré-calculée (courbe rouge) permet effectivement de converger plus rapidement que la résolution naïve, où l'on part de zéro (courbe bleue) – du moins dans les premières itérations. Toutefois, l'erreur par rapport à la solution de référence finit par stagner; la base pré-calculée n'est plus suffisante pour représenter le problème modifié avec davantage de précision.

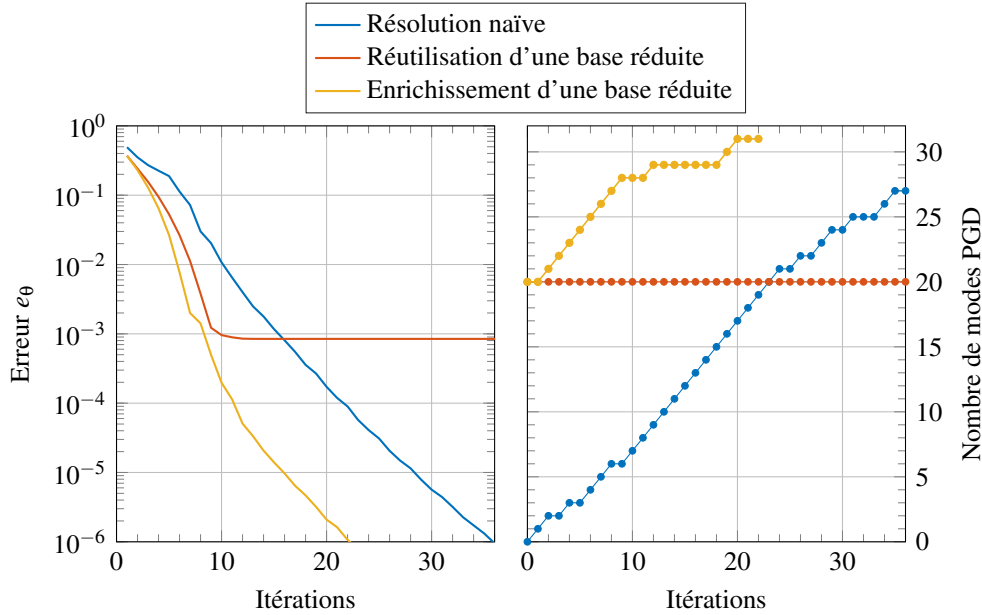


FIGURE 6 – Comparaison de la convergence de l'algorithme LATIN sur la partie thermique lors de la résolution du problème modifié représenté en Figure 5b.

La même approche avait été mise en œuvre dans [16] au sein d'une méthode de partitionnement classique incrémentale. La nécessité à la fois d'enrichir le modèle réduit existant et de pouvoir corriger la solution en conséquence sur l'ensemble des pas de temps avait été mise en évidence. L'une des propriétés remarquables de l'algorithme LATIN-PGD réside précisément dans sa capacité à pouvoir générer à la volée des modes corrigeant l'ensemble du domaine $\Omega \times I$. Ainsi, la base pré-calculée ayant servi à initialiser l'algorithme peut être enrichie, la rendant plus adaptée au nouveau problème traité [10].

Pour la résolution du problème de la Figure 5b, nous parvenons alors à la même précision qu'avec la résolution naïve, mais avec moins d'itérations et en générant seulement quelques modes supplémentaires (cf courbes jaunes de la Figure 6).

5 Conclusion et perspectives

Nous avons présenté un cadre modulaire adapté à la simulation multimodèle de problèmes multiphysiques fortement couplés en volume. Basée sur le solveur LATIN-PGD, la stratégie se distingue des méthodes classiques par l'introduction d'une interface entre physiques occupant le volume entier, sur laquelle les équations couplées sont satisfaites. Les physiques étant par ailleurs traitées séparément, on propose d'utiliser différents types de modèles pour chacune. Les exemples numériques montrent la faisabilité de cette extension multimodèle en combinant un modèle haute fidélité à un modèle réduit PGD, d'abord construit à la volée en même temps que la solution, puis pré-calculé sur un problème annexe. Dans ce dernier cas, la possibilité de corriger la solution sur l'ensemble du domaine à l'aide de quelques modes PGD additionnels permet d'améliorer les niveaux de précision atteints.

Ces premiers résultats nous permettent d'envisager d'aller plus loin dans le mélange de modèles de natures différentes. Si l'évolution de l'une des physiques impliquée est plus simple ou présente une importance moindre vis-à-vis de l'application visée, on peut imaginer utiliser un modèle simplifié pour celle-ci, réduisant ainsi les coûts de calcul. Une autre voie envisagée est de partir de données expérimentales, potentiellement disponibles en faible nombre. Le comportement couplé est toujours vérifié exactement sur l'interface entre physiques, c'est pourquoi une attention particulière devra être portée aux opérateurs permettant le transfert des quantités vers et depuis cette interface. Si toutefois la précision atteinte n'est pas satisfaisante, on pourra dans un second temps corriger la solution sur l'ensemble du domaine à l'aide de quelques modes PGD, à l'image de ce qui a été présenté.

Références

- [1] M. Beringhieri, M. Gueguen, J.-C. Grandidier. Solution of strongly coupled multiphysics problems using space-time separated representations – application to thermoviscoelasticity. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17:393–401, 2010. doi: [10.1007/s11831-010-9050-5](https://doi.org/10.1007/s11831-010-9050-5).
- [2] F. Chinesta, P. Ladeveze, E. Cueto. A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 18:395–404, 2011. doi: [10.1007/s11831-011-9064-7](https://doi.org/10.1007/s11831-011-9064-7).
- [3] C. Danowski, V. Gravemeier, L. Yoshihara, W. A. Wall. A monolithic computational approach to thermo-structure interaction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 95(13):1053–1078, 2013. doi: [10.1002/nme.4530](https://doi.org/10.1002/nme.4530).
- [4] D. Dureisseix, H. Bavestrello. Information transfer between incompatible finite element meshes : Application to coupled thermo-viscoelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(44):6523–6541, 2006. doi: [10.1016/j.cma.2006.02.003](https://doi.org/10.1016/j.cma.2006.02.003).
- [5] D. Dureisseix, P. Ladevèze, D. Néron, B. A. Schrefler. A multi-time-scale strategy for multiphysics problems : Application to poroelasticity. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 1(4):387–400, 2003. doi: [10.1615/IntJMultCompEng.v1.i4.50](https://doi.org/10.1615/IntJMultCompEng.v1.i4.50).
- [6] D. Dureisseix, P. Ladeveze, B. Schrefler. A latin computational strategy for multiphysics problems - application to poroelasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56:1489 – 1510, 2003. doi: [10.1002/nme.622](https://doi.org/10.1002/nme.622).
- [7] P. Erbts, A. Düster. Accelerated staggered coupling schemes for problems of thermoelasticity at finite strains. *Computers and Mathematics with Applications*, 64(8):2408–2430, 2012. doi: [10.1016/j.camwa.2012.05.010](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2012.05.010).
- [8] P. Farah, A.-T. Vuong, W. Wall, A. Popp. Volumetric coupling approaches for multiphysics simulations on non-matching meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 108(12):1550–1576, 2016. doi: [10.1002/nme.5285](https://doi.org/10.1002/nme.5285).
- [9] C. Felippa, K. C. Park, C. Farhat. Partitioned analysis of coupled system. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:3247–3270, 2001. doi: [10.1016/S0045-7825\(00\)00391-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00391-1).
- [10] C. Heyberger, P.-A. Boucard, D. Néron. A rational strategy for the resolution of parametrized problems in the pgd framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 259:40–49, 2013. doi: [10.1016/j.cma.2013.03.002](https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.03.002).
- [11] P. Ladevèze. *Nonlinear Computational Structural Mechanics: New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer, 1999.
- [12] J. Martins, D. Neto, J. Alves, M. Oliveira, H. Laurent, A. Andrade-Campos, L. Menezes. A new staggered algorithm for thermomechanical coupled problems. *International Journal of Solids and Structures*, 122-123:42–58, 2017. doi: [10.1016/j.ijsolstr.2017.06.002](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.06.002).
- [13] W. Nowacki. *Dynamic problems of thermoelasticity*. Springer, 1975.
- [14] D. Néron, D. Dureisseix. A computational strategy for poroelastic problems with a time interface between coupled physics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73(6):783–804, 2008. doi: [10.1002/nme.2091](https://doi.org/10.1002/nme.2091).
- [15] D. Néron, D. Dureisseix. A computational strategy for thermo-poroelastic structures with a time–space interface coupling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75(9):1053–1084, 2008. doi: [10.1002/nme.2283](https://doi.org/10.1002/nme.2283).
- [16] F. Wurtzer, P.-A. Boucard, P. Ladevèze, D. Néron. Première approche d'une stratégie de partitionnement multimodèle pour la simulation de problèmes multiphysiques. *25^{ème} Congrès Français de Mécanique*, 2022.