

Modèle non local pour la prise en compte des effets de gradient de contraintes en fretting-fatigue : Application aux contacts entre corps isotropes élastiquement dissimilaires

N.P. Lare¹, Y. Guilhem¹, F. Meray², S. Pommier¹

¹ Université Paris-Saclay, ENS Paris-Saclay, CentraleSupélec, CNRS, LMPS - Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay, 91190, Gif-sur-Yvette, {naansonou.lare,yoann.guilhem,sylvie.pommier}@ens-paris-saclay.fr

² Safran Aircraft Engines, Rond-Point René Ravaud, Moissy-Cramayel, 77550, France, florian.meray@safrangroup.com

Résumé — Les problèmes de fretting ou de fretting-fatigue sont caractérisés par la présence d'un fort gradient de contraintes apparaissant en bords de contact. En se basant sur une analogie entre la mécanique de la rupture et la mécanique du contact, une description non locale simplifiée de la zone de contact est proposée et permet de prendre en compte de manière objective les effets de gradient. Cette description non locale consiste à partitionner le champ cinématique dans un référentiel attaché au front de contact en une somme réduite de termes, chaque terme de la décomposition étant le produit entre un facteur d'intensité et une fonction de forme identifiée a posteriori .

Mots clés — Fretting-fatigue, implémentation non-intrusive, réduction de modèle (POD), bimatériaux.

1 Introduction

Le fretting est un phénomène apparaissant entre deux corps en contact soumis à des sollicitations vibratoires qui occasionnent des micro-glissements à l'interface du contact. C'est un phénomène qui peut mener à l'endommagement par fissuration [5, 9] des pièces en contact. Combiné à un chargement de fatigue, les fissures initiées par fretting peuvent ainsi se propager et conduire à la ruine prématurée de la structure [14]. Le phénomène de fretting-fatigue est rencontré dans de nombreux secteurs industriels et constitue une préoccupation d'importance majeure. En aéronautique par exemple, la sollicitation de fretting-fatigue est présente à l'interface du contact aubes/disque dans les turboréacteurs comme montré à la Figure 1 et peut provoquer la ruine d'une aube ou d'un disque, pièce tournant à grande vitesse et sur laquelle la fissuration n'est pas autorisée.

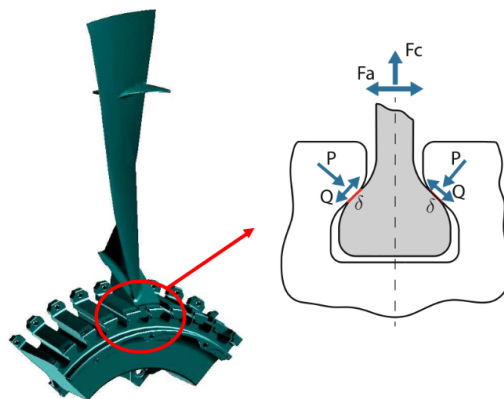


FIGURE 1 – Contact aube/disque et sollicitation de l'interface de contact

L'une des principales caractéristiques des problèmes de fretting-fatigue est la présence d'un fort gradient de contraintes localisé en bords de contact. La prise en compte du gradient de contraintes qui dépend du chargement, de la géométrie des corps en contact et qui contrôle les mécanismes d'amorçage de fissures [1, 2] est essentielle pour prédire la durée de vie, étant donné qu'un phénomène d'arrêt de fissure peut être observé. Les modèles éléments finis doivent présenter un maillage très fin autour du contact

afin d'assurer une solution convergée. Cela conduit à des tailles de modèles et des temps de calculs très importants et inadaptés pour les grands modèles de systèmes industriels (disque avec toutes ses aubes). Pour s'affranchir de la dépendance au maillage, un modèle non local a été proposé par Montebello [11] avec pour but de décrire de manière à la fois objective et efficiente le gradient à l'aide de variables non locales. Ce modèle non local repose sur l'approche de type « crack analogue » de Giannakopoulos [6] et permet de capturer l'effet de gradient par le biais des facteurs d'intensité qui sont invariants vis-à-vis de la géométrie des corps en contact et qui permettent de prendre en compte objectivement l'effet de gradient. En se basant sur les travaux de Montebello, la modélisation non locale de la zone de contact a été étendue en 3D par Rousseau [12] avec prise en compte de chargements variables (en intensité comme en direction) et non proportionnels. Un modèle incrémental de prédiction du glissement partiel apparaissant à l'interface du contact ainsi que des critères non locaux de durée de vie sont également proposés dans [12]. Jusqu'ici, les travaux [11, 12] se sont restreints au cas où les corps en contact sont isotropes et élastiquement similaires.

Dans ce papier, une extension du modèle non local au cas des bimatériaux ou des corps isotropes en contact présentant des comportements linéaires élastiques différents, est proposée. Et pour se faire, une analogie avec les problèmes de fissuration d'interface y est introduite. Ce papier se structure comme suit : Dans la première partie, les aspects théoriques permettant de construire le modèle non local ainsi que le formalisme permettant de l'étendre aux corps élastiquement dissimilaires sont introduits. Ensuite une validation 2D de l'approche en fretting simple sur cas test bimatériau est présentée.

2 Description non locale de la zone de contact

La description non locale de la zone de contact se base sur une représentation simplifiée du mouvement autour du front de contact (par analogie avec le front de fissure) à l'aide de variables non locales et des fonctions de forme associées. Ces variables non locales sont analogues aux facteurs d'intensité en mécanique de la rupture qui permettent de caractériser les champs mécaniques en pointe de fissure et de prendre en compte l'effet de gradient. Cette description non locale se justifie par le fait qu'il existe une équivalence entre les champs mécaniques présents en pointe de fissure et ceux présents au front de contact [6].

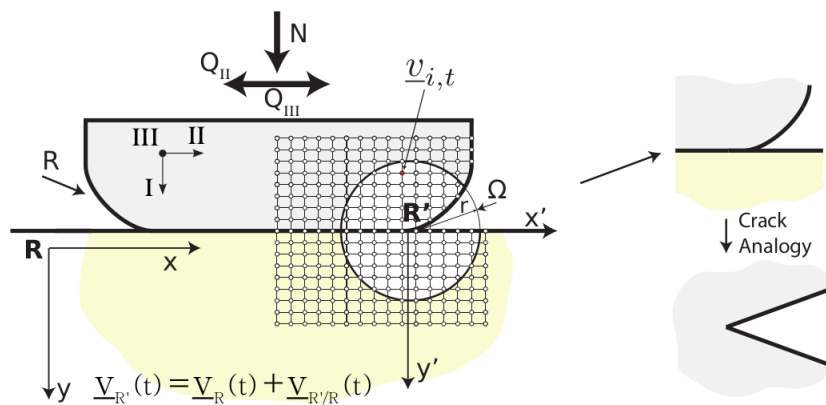


FIGURE 2 – Analogie mécanique du contact/mécanique linéaire élastique de la rupture

2.1 Modélisation non locale : éléments de théorie

Sur un problème de fretting ou sur un problème de fissuration, la discontinuité géométrique (front de contact ou front de fissure) est à l'origine d'un fort gradient de contraintes. Si les phénomènes non linéaires restent confinés à l'intérieur d'un domaine élastique, alors le comportement de la zone au voisinage de la discontinuité géométrique est régi par le domaine élastique. Ainsi, la géométrie locale impose la distribution spatiale des champs mécaniques alors que le chargement macroscopique gouverne l'intensité de ces champs. Sous cette hypothèse, le champ de vitesse (1) peut être partitionné en une somme

réduite de termes, chaque terme étant le produit entre un facteur d'intensité et un champ spatial [11] :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)_{R'} \simeq \underbrace{\dot{I}_I(t)\Psi_I(\mathbf{x}) + \dot{I}_{II}(t)\Psi_{II}(\mathbf{x})}_{\mathbf{v}^e} + \underbrace{\dot{I}_{II}^c(t)\Psi_{II}^c(\mathbf{x})}_{\mathbf{v}^c} \quad (1)$$

où $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)_{R'}$ est le champ de vitesse obtenu par simulation à l'intérieur du domaine circulaire Ω et exprimé dans un repère et référentiel attaché au front de contact (voir Figure 2). \mathbf{x} et t désignent respectivement la position et le temps. $\Psi_I(\mathbf{x})$, $\Psi_{II}(\mathbf{x})$ et $\Psi_{II}^c(\mathbf{x})$ sont les fonctions de forme et constituent une base :

$$\begin{aligned} \Psi_I(\mathbf{x}) \perp \Psi_{II}(\mathbf{x}) &\rightarrow \int_{\Omega} \Psi_I(\mathbf{x}) \cdot \Psi_{II}(\mathbf{x}) = 0 \\ \Psi_I(\mathbf{x}) \perp \Psi_{II}^c(\mathbf{x}) &\rightarrow \int_{\Omega} \Psi_I(\mathbf{x}) \cdot \Psi_{II}^c(\mathbf{x}) = 0 \\ \Psi_{II}(\mathbf{x}) \perp \Psi_{II}^c(\mathbf{x}) &\rightarrow \int_{\Omega} \Psi_{II}(\mathbf{x}) \cdot \Psi_{II}^c(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned}$$

I_I , I_{II} et I_{II}^c sont donc des variables indépendantes qui caractérisent l'intensité de $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)_{R'}$.

La modélisation du comportement non linéaire provenant du frottement dans les zones en glissement partiel se fait par l'ajout du terme $\mathbf{v}^c = \dot{I}_{II}^c(t)\Psi_{II}^c(\mathbf{x})$ dans l'approximation du champ de vitesse (1). Le terme \mathbf{v}^e dans (1) représente la réponse linéaire élastique de la structure.

Les fonctions de formes linéaires $\Psi_I(\mathbf{x})$ et $\Psi_{II}(\mathbf{x})$ sont identifiées a posteriori en utilisant des snapshots POD (Proper Orthogonal Decomposition). Pour capturer séparément les effets du chargement normal et tangentiel, les champs $\Psi_I(\mathbf{x})$ et $\Psi_{II}(\mathbf{x})$ sont identifiés respectivement lors d'une petite décharge ΔP sur l'effort normal et lors d'une petite décharge ΔQ sur l'effort tangentiel afin d'avoir une zone en glissement partiel négligeable et par conséquent supposer un comportement purement élastique du contact.

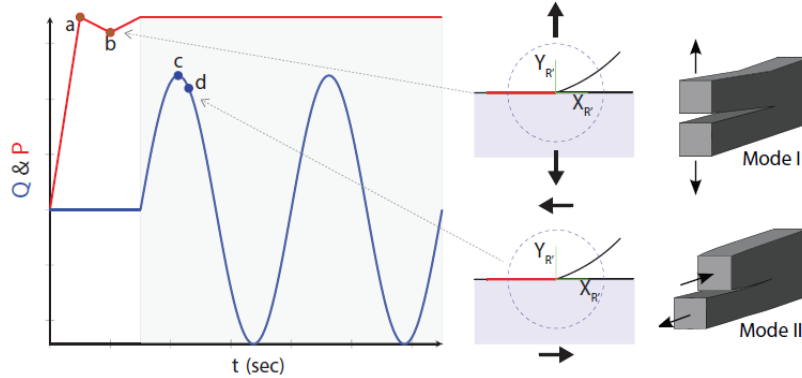


FIGURE 3 – Identification des fonctions de forme linéaires

$$\Psi_I(\mathbf{x}) = \frac{u(\mathbf{x}, t_b) - u(\mathbf{x}, t_a)}{t_b - t_a} \quad (2)$$

$$\Psi_{II}(\mathbf{x}) = \frac{u(\mathbf{x}, t_d) - u(\mathbf{x}, t_c)}{t_d - t_c} \quad (3)$$

avec $u(\mathbf{x}, t)$, le champ de déplacement.

Les facteurs d'intensité linéaires sont obtenus par projection du champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)_{R'}$ sur les fonctions de forme $\Psi_I(\mathbf{x})$ et $\Psi_{II}(\mathbf{x})$:

$$\dot{I}_I(t) = \frac{\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \Psi_I}{\int_{\Omega} \Psi_I \cdot \Psi_I} \rightarrow I_I(t) = \int_{t=0}^T \dot{I}_I(\tau) d\tau \quad (4)$$

$$\dot{I}_{II}(t) = \frac{\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \Psi_{II}}{\int_{\Omega} \Psi_{II} \cdot \Psi_{II}} \rightarrow I_{II}(t) = \int_{t=0}^T \dot{I}_{II}(\tau) d\tau \quad (5)$$

La partie non linéaire \mathbf{v}^c du champ de vitesse est identifiée en effectuant une transformation de Karhunen-Loeve (ou POD) sur le résidu élastique du champ de vitesse :

$$\mathbf{v}^c(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}^e(\mathbf{x}, t) \simeq \dot{I}_{II}^c(t)\Psi_{II}^c(\mathbf{x}) \quad (6)$$

et en intégrant \dot{I}_I^c , le facteur d'intensité complémentaire qui caractérise l'intensité du glissement partiel est obtenu :

$$I_{II}^c(t) = \int_{t=0}^T \dot{I}_{II}^c(\tau) d\tau \quad (7)$$

En utilisant la transformation de Karhunen-Loeve [10] et en faisant l'hypothèse que la géométrie du contact est localement auto-similaire (invariante par changement d'échelle), les champs spatiaux $\Psi_I(\mathbf{x})$, $\Psi_{II}(\mathbf{x})$ et $\Psi_{II}^c(\mathbf{x})$ peuvent être mis sous la forme d'un produit de deux fonctions à variables séparées (8,9,10). Sous cette forme, il est possible de faire une comparaison avec les fonctions de forme analytiques de mécanique de la rupture.

$$\Psi_I(\mathbf{x}) \rightarrow \Psi_I(r, \theta) \simeq f_I(r)g_I(\theta) \quad (8)$$

$$\Psi_{II}(\mathbf{x}) \rightarrow \Psi_{II}(r, \theta) \simeq f_{II}(r)g_{II}(\theta) \quad (9)$$

$$\Psi_{II}^c(\mathbf{x}) \rightarrow \Psi_{II}^c(r, \theta) \simeq f_{II}^c(r)g_{II}^c(\theta) \quad (10)$$

Pour prendre en compte l'influence de la force de fatigue dans la modélisation non locale, on enrichit l'approximation (1) du champ de vitesse comme suit [12] :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)_{R'} \simeq \dot{I}_I(t)\Psi_I(\mathbf{x}) + \dot{I}_{II}(t)\Psi_{II}(\mathbf{x}) + \dot{I}_{II}^c(t)\Psi_{II}^c(\mathbf{x}) + \dot{I}_\sigma(t)\Psi_\sigma(\mathbf{x}) \quad (11)$$

Le terme de fatigue $\dot{I}_\sigma(t)\Psi_\sigma(\mathbf{x})$ de l'approximation (11) est identifiée par POD sur le résidu total du champ de vitesse :

$$\mathbf{v}^r(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - (\mathbf{v}^e + \mathbf{v}^c) \simeq \dot{I}_\sigma(t)\Psi_\sigma(\mathbf{x}) \quad (12)$$

2.2 Extension de la modélisation non locale aux corps élastiquement dissimilaires

Pour pouvoir étendre la modélisation non locale au cas des corps en contact ayant des propriétés élastiques dissimilaires, une analogie sera faite avec un problème de fissure situé à l'interface d'un bimatériau comme illustré à la Figure 4.

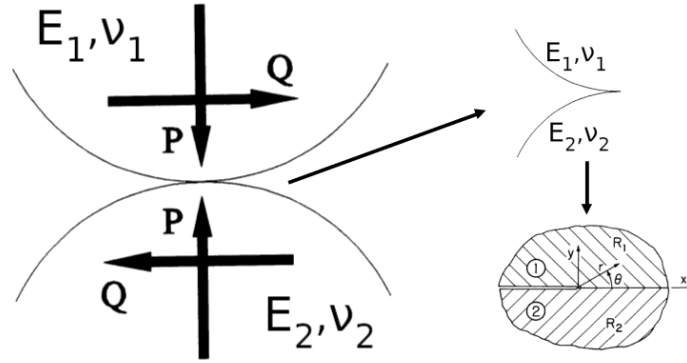


FIGURE 4 – Analogie mécanique du contact/mécanique de la rupture interfaciale

Le champ de déplacement en pointe d'une fissure d'interface (13) présente une singularité oscillatoire en $r^{i\epsilon}$ ($r^{i\epsilon} = \cos[\epsilon \log(r)] + i \sin[\epsilon \log(r)]$) inhérente à la formulation mathématique du problème d'élasticité linéaire pour les fissures d'interface [4, 8]. Il a la forme singulière suivante [13] :

$$u_d = \frac{1}{2G_1} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [\Re(Kr^{i\epsilon})\tilde{u}_d^I(\theta, \epsilon) + \Im(Kr^{i\epsilon})\tilde{u}_d^{II}(\theta, \epsilon)] \quad (13)$$

$$(d=x,y)$$

Avec :

- $\Re(\cdot)$ la partie réelle de (\cdot) et $\Im(\cdot)$ la partie imaginaire de (\cdot)
- K , le facteur d'intensité complexe qui couple les modes d'ouverture et de cisaillement :

$$(\sigma_{yy} + i\sigma_{yx})_{\theta=0} = \frac{Kr^{i\epsilon}}{\sqrt{2\pi r}}, \quad K = K_1 + iK_2 \quad (14)$$

- $\tilde{u}^*(\theta, \varepsilon)$ sont les fonctions orthoradiales du champ de déplacement, $*$ =I, II
- ε , la constante biélastique ou indice d'oscillation qui dépend du paramètre de Dundurs [3] β :

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right), \quad \beta = \frac{G_1(\kappa_2 - 1) - G_2(\kappa_1 - 1)}{G_1(\kappa_2 + 1) + G_2(\kappa_1 + 1)}$$

Les symboles κ_1 , ν_1 et G_1 désignent respectivement la constante de Kolosov, le coefficient de Poisson et le module de Coulomb dans la région R_1 située au dessus de l'interface (voir Figure 4). L'indice 2 désignera les quantités de la région R_2 située en dessous de l'interface.

Le champ de déplacement (13) peut être réécrit sous la forme simplifiée suivante à laquelle on se référera par la suite :

$$u_d = \Re(Kr^{i\varepsilon})F(r, \theta) + \Im(Kr^{i\varepsilon})G(r, \theta) \quad (15)$$

avec $F(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ et $G(r, \theta) = f(r)h(\theta)$.

Sur un problème de fissuration d'interface, il existe donc à l'interface un couplage intrinsèque (14) entre les quantités normale et tangentielle. Un chargement au loin purement normal va ainsi par couplage générer du cisaillement à l'interface et vice-versa. Ce couplage entre les quantités normale et tangentielle présent sur les problèmes de fissuration d'interface est également observé à l'interface d'un contact entre corps élastiquement dissimilaires [7] (Figure 5) :

$$\frac{1}{A} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(\xi)}{x-\xi} d\xi - \beta q(x)$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{q(\xi)}{x-\xi} d\xi + \beta p(x)$$

où :

- $h(x)$ et $g(x)$ sont les déplacements relatifs normal et tangentiel respectivement des surfaces en contact
- $p(x)$ et $q(x)$ sont les pressions normale et tangentielle de contact respectivement
- a représente la demi largeur de contact et A un paramètre matériau qui dépend des propriétés élastiques des corps en contact

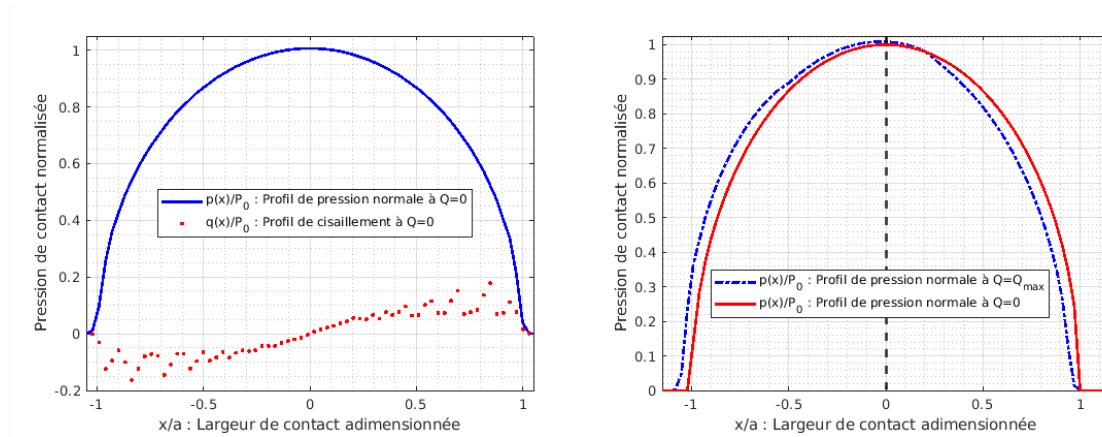


FIGURE 5 – Couplage entre les pressions normales et de cisaillement à l'interface de contact

La présence du couplage entre les grandeurs normale et tangentielle impose une nouvelle stratégie d'identification des champs de référence $\Psi_I(\mathbf{x})$ et $\Psi_{II}(\mathbf{x})$ pour capturer séparément les effets du chargement normal et tangentiel. Pour capturer l'effet de l'effort tangentiel, le champ $\Psi_{II}(\mathbf{x})$ sera calculé comme précédemment via (3) lors d'une petite décharge ΔQ . Lors de la décharge ΔP , du cisaillement apparaîtra à l'interface de contact par effet de couplage et par conséquent le champ $\Psi_I(\mathbf{x})$ est identifié de la manière suivante :

$$\tilde{\Psi}_I(\mathbf{x}) = \frac{u(\mathbf{x}, t_b) - u(\mathbf{x}, t_a)}{t_b - t_a} \quad (16)$$

$$\tilde{\Psi}_I(\mathbf{x}) = \Psi_I(\mathbf{x}) + \lambda \Psi_{II}(\mathbf{x}) \quad (17)$$

où λ représente la part de cisaillement générée lors de la décharge ΔP et est exprimé comme suit :

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} \tilde{\Psi}_I(\mathbf{x}) \cdot \Psi_{II}(\mathbf{x})}{\int_{\Omega} \Psi_I(\mathbf{x}) \cdot \Psi_{II}(\mathbf{x})} \quad (18)$$

3 Validation bidimensionnelle de l'approche en fretting simple

Pour valider l'approche proposée à la sous section 2.2, une simulation de contact cylindre/plan en condition de fretting est réalisée. Une loi de Coulomb avec un coefficient de frottement f est définie entre les surfaces en contact et la méthode des multiplicateurs de Lagrange est choisie pour la résolution du contact. Un maillage fin de $10 \mu\text{m}$ proche de la zone de contact est utilisé comme illustré à la Figure 6 afin d'obtenir une solution convergée du champ de contraintes à l'interface de contact. Les résultats issus de la simulation sont ensuite post-traités de manière non intrusive pour extraire les facteurs d'intensité.

Un effort normal P et un effort cyclique de fretting Q tel que $Q/fP < 1$ sont appliqués via un point de référence couplé cinématiquement à la surface supérieure de l'éprouvette. Pour ce cas test, le ratio entre les constantes élastiques des deux corps en contact est tel que $E_1/E_2 = 0.57$ et $\nu_1/\nu_2 = 0.95$.

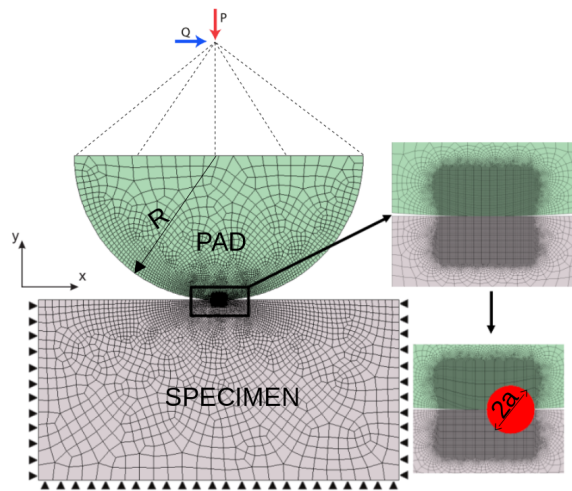


FIGURE 6 – Maillage pour la simulation du contact cylindre/plan et conditions aux limites

Le champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)_{R'}$ est dans un premier temps extrait du calcul. Ensuite les fonctions de forme $\Psi_I(\mathbf{x})$ et $\Psi_{II}(\mathbf{x})$ sont calculés à l'aide de (3,16-18) puis exprimés en coordonnées polaires par le biais de (8,9). Ces fonctions sont ensuite comparées respectivement aux champs spatiaux $F(r, \theta)$ et $G(r, \theta)$ présents en pointe d'une fissure d'interface (15).

La Figure 7 montre une équivalence entre les fonctions de formes présentes au front de contact et celles présentes en pointe d'une fissure d'interface, validant ainsi l'analogie faite entre les deux problèmes. Il est alors possible de remplacer directement dans (1) les champs numériques $\Psi_I(\mathbf{x})$ et $\Psi_{II}(\mathbf{x})$ par les champs analytiques $F(r, \theta)$ et $G(r, \theta)$ respectivement. Et sachant que la solution analytique ne dépend pas du maillage, cela introduit une flexibilité dans le modèle non local et permet l'usage d'éléments grossiers dans le calcul numérique sans dégrader la précision sur les variables non locales I_I et I_{II} .

En changeant le rayon de courbure R de l'éprouvette, les fonctions de forme $\Psi_I(\mathbf{x})$ et $\Psi_{II}(\mathbf{x})$ restent identiques (voir Figure 8). Cela illustre l'adaptabilité et la transférabilité de l'approche à une variété de configuration de contact.

L'évolution à la Figure 9a des facteurs d'intensité I_I et I_{II} obtenus à partir de (4,5) illustre le couplage entre les modes d'ouverture et de cisaillement dû à la dissimilarité élastique.

Le champ complémentaire $\Psi_{II}^c(\mathbf{x})$ est ensuite identifié par POD (6) puis mis sous la forme d'un produit entre une fonction radiale et angulaire. La partie radiale $f_{II}^c(r)$ du champ complémentaire évolue comme une exponentielle décroissante (Figure 10a), ce qui montre le caractère local du glissement partiel. Le glissement est maximal en bord de contact et décroît au fur et à mesure qu'on se rapproche de la zone adhérente.

Lorsqu'on varie le rayon de courbure R de l'éprouvette, le champ complémentaire reste quasi-identique comme on peut le voir à la Figure 10b.

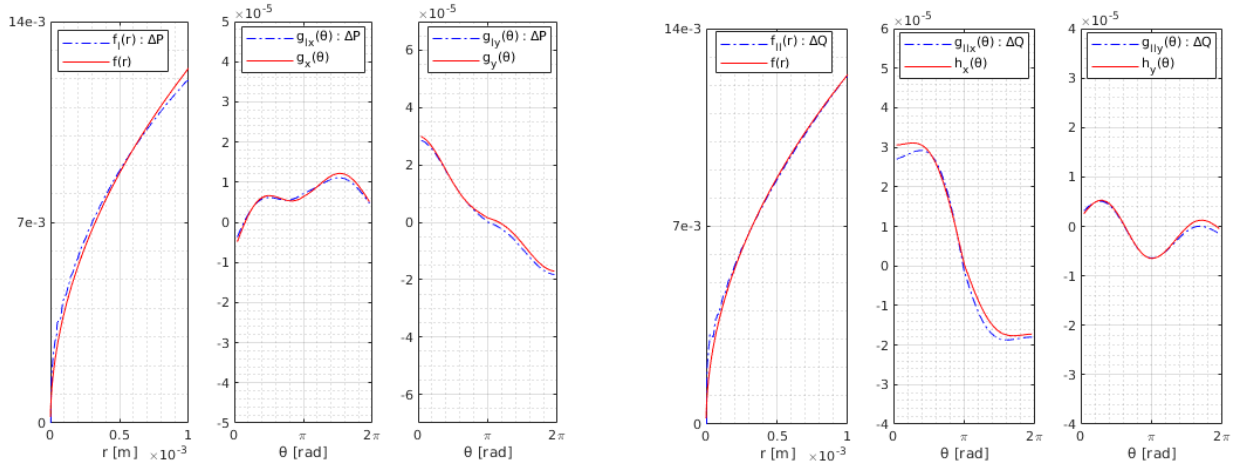


FIGURE 7 – Évolutions radiales et angulaires des fonctions $\Psi_I(\mathbf{x})$, $\Psi_{II}(\mathbf{x})$ et comparaison avec les champs analytiques $F(r, \theta)$ et $G(r, \theta)$

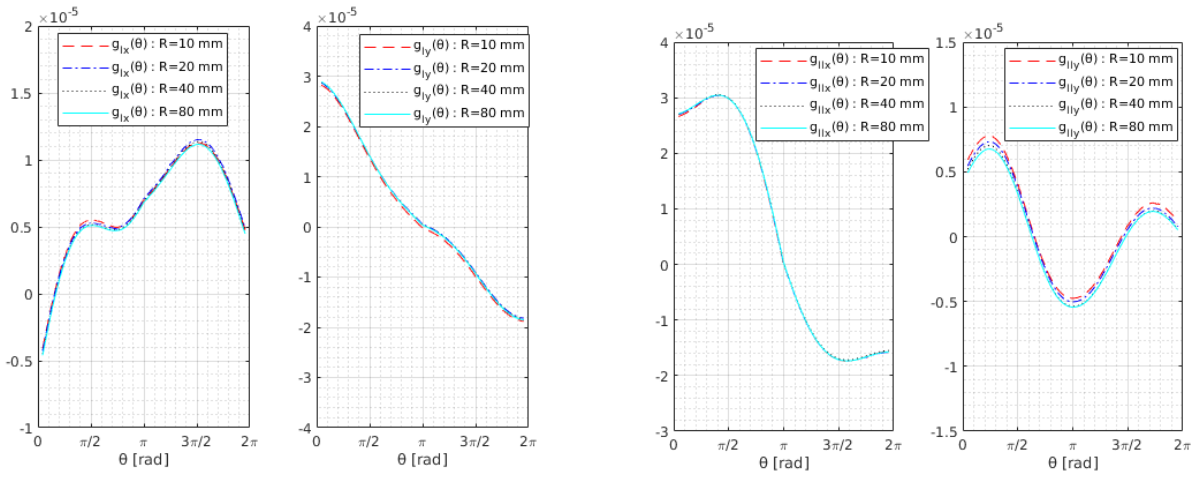


FIGURE 8 – Évolutions radiales et angulaires des fonctions $\Psi_I(\mathbf{x})$, $\Psi_{II}(\mathbf{x})$ en fonction de R

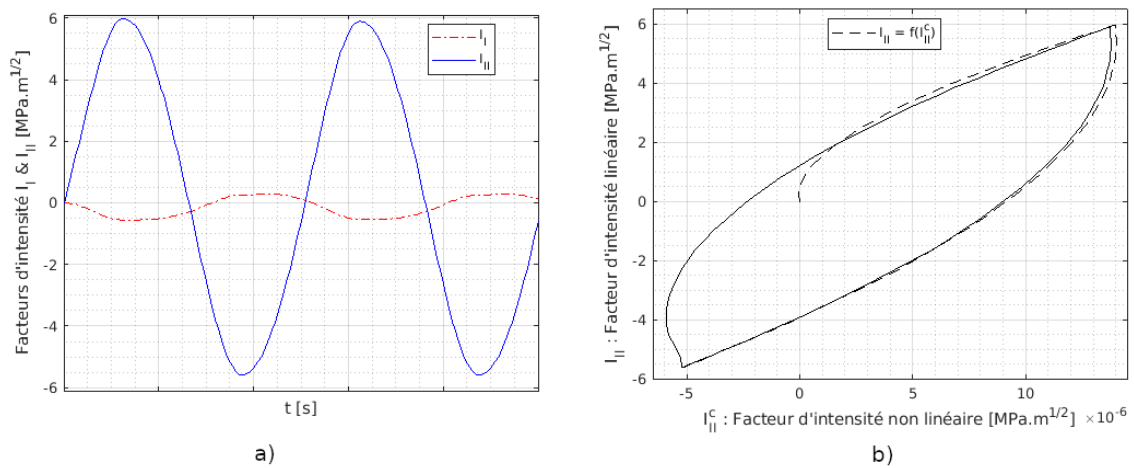


FIGURE 9 – a) Facteurs d'intensité linéaires I_I et I_{II} et b) Évolution du facteur d'intensité linéaire I_{II} en fonction du facteur d'intensité non linéaire I_{II}^c

Le facteur d'intensité complémentaire I_{II}^c qui représente l'intensité du glissement partiel s'obtient avec (7). En traçant $I_{II} = f(I_{II}^c)$, on obtient une courbe hystérétique non symétrique dont l'aire représente

l'énergie dissipée à l'échelle non locale (voir Figure 9b). La non symétrie de la courbe vient du fait que la taille de la zone en glissement partiel au bord de contact n'est pas la même lorsque $Q = +Q_{max}$ et $Q = -Q_{max}$.

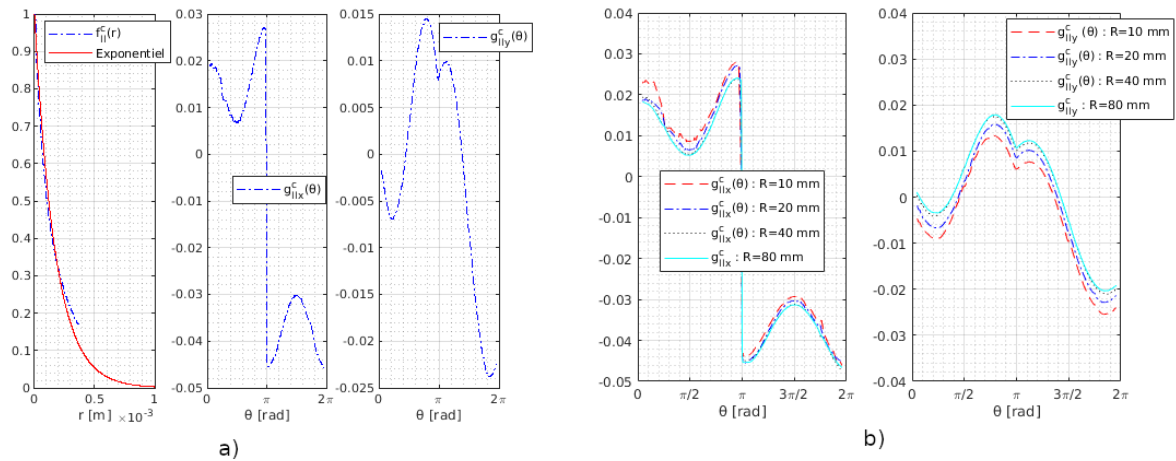


FIGURE 10 – a) Évolution du champ complémentaire et b) Influence du rayon de courbure R sur $\Psi_{II}^c(\mathbf{x})$

4 Conclusion

Un nouveau formalisme permettant d'étendre le modèle non local au cas des corps en contact ayant des propriétés élastiques dissimilaires a été exposé. Ce formalisme repose sur une analogie entre la mécanique du contact et la mécanique de la rupture interfaciale dont l'équivalence a été démontrée. La démarche est non intrusive et a été validée sur un cas test de fretting simple en 2D. Celle-ci est robuste et se décline naturellement au cas des corps élastiquement similaires ($\varepsilon = \lambda = 0$).

Références

- [1] R. Amargier. *Amorçage de fissures et gradient de contrainte en fretting et en fatigue*, 2011.
- [2] R. Bramhall. *Studies in fretting fatigue*, 1973.
- [3] J. Dundurs. *Discussion : « Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading »*, ASME J. Appl. Mech., 460-466, 1969.
- [4] A. England. *A crack between dissimilar media*, 1965.
- [5] A. Fenner, J. Field. *La fatigue dans les conditions de frottement*, Revue de metallurgie, EDP Sciences, 475-485, 1958.
- [6] A. Giannakopoulos, T. Lindley, S. Suresh. *Aspects of equivalence between contact mechanics and fracture mechanics : theoretical connections and a life-prediction methodology for fretting-fatigue*, Acta materialia, Elsevier, 2955-2968, 1998.
- [7] D. Hills, D. Nowell. *Mechanics of fretting fatigue*, Kluwer Academic Publisher, 1994.
- [8] D. Hills, P. Kelly, D. Dai, A. Korsunsky. *Solution of crack problems : the distributed dislocation technique*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] T. Lindley. *Fretting fatigue in engineering alloys*, International journal of fatigue, Elsevier, 39-49, 1997.
- [10] M. Loeve. *Probability theory : foundations, random sequences*, New York, NY : Van Nostrand, 1955.
- [11] C. Montebello. *Analysis of the stress gradient effect in Fretting-Fatigue through a description based on nonlocal intensity factors*, 2015.
- [12] G. Rousseau. *Modélisation de la durée de vie en fretting-fatigue sous chargements d'amplitudes variables*, 2020.
- [13] N. Sukumar, Z. Huang, J-H. Prévost, Z. Suo. *Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks*, International journal for numerical methods in engineering, Wiley Online Library, 1075-1102, 2004.
- [14] E. Warlow-Davies. *Fretting corrosion and fatigue strength : brief results of preliminary experiments*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, SAGE Publications Sage UK : London, England, 32-38, 1941.