

Identification de propriétés élastiques spatialement variables à partir d'essais DIC par une méthode FEMU Bayésienne

Armand Touminet^{1,2}, Pierre Kerfriden¹, Sabine Cantournet¹, Victor Fabre²

¹ Centre des Matériaux, Mines Paris, {armand.touminet,pierre.kerfriden,sabine.cantournet}@minesparis.psl.eu

² Hutchinson SA, {armand.touminet,victor.fabre}@hutchinson.com

Résumé — Une méthode Bayésienne d'identification de champs de propriétés élastiques à partir d'essais de corrélation d'images numériques (DIC) est présentée. Il s'agit d'une généralisation des procédures d'identification type FEMU et I-DIC aux matériaux dont les propriétés élastiques varient spatialement. La méthode est formulée comme un problème inverse Bayésien sous contrainte EDP, et une attention particulière est donnée aux paramètres de covariance des solutions, que nous proposons d'identifier par une approche type Bayes empirique. La méthode proposée est évaluée sur un exemple numérique.

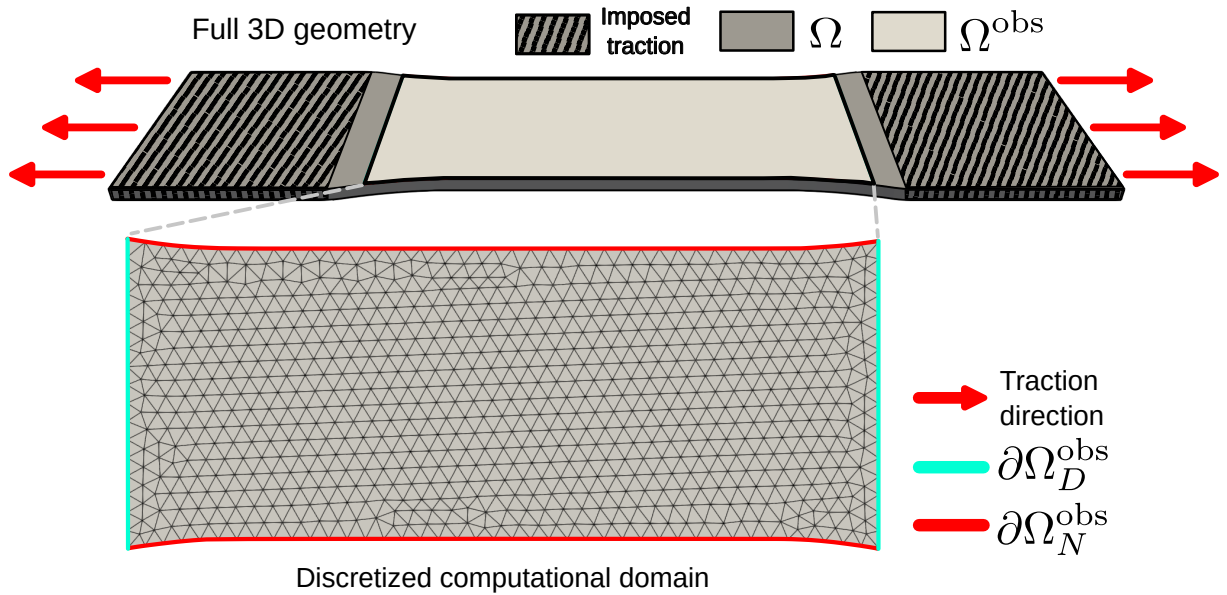
Mots clés — DIC, FEMU, Bayésien, Champs aléatoires gaussiens.

1 Introduction

De nombreuses méthodes d'identification plein champ ont été développées ces dernières décennies afin de calibrer les paramètres de relations constitutives pour un grand nombre de matériaux [1, 2]. Dans les méthodes usuelles comme FEMU ou I-DIC, un jumeau numérique de l'essai est mis en place et l'écart entre les déplacements simulés et observés est minimisé via un algorithme itératif. Typiquement, les paramètres d'intérêt sont des variables scalaires intervenant dans des relations constitutives non-linéaires et complexes [3]. Dans ces travaux, on propose d'étendre ces approches au cas où les paramètres à identifier sont des champs à valeurs scalaires, dans le cas de l'élasticité linéaire. Cette extension soulève de nombreux défis. Premièrement, une discrétisation spatiale des paramètres d'intérêt est introduite, résultant en un nombre conséquent de degrés de liberté à identifier. De plus, dans les méthodes existantes, l'écart simulation observation est minimisé via un algorithme de type quasi-Newton, où le gradient est approximé par différences finies, ce qui nécessite de résoudre plusieurs systèmes linéaires à chaque itération. Avec une discrétisation spatiale fine, cela devient trop coûteux en calcul, et une méthode alternative doit être considérée. Dans ces travaux, une méthode de l'adjoint est utilisée. Le caractère mal posé du problème inverse résultant implique la nécessité d'une méthode de régularisation afin de stabiliser le problème numérique. Dans l'approche bayésienne présentée, cette régularisation prend la forme d'un *prior* gaussien sur les paramètres d'intérêt. Cela implique notamment le choix d'un modèle de covariance, et dans ces travaux on s'intéresse à l'utilisation de la covariance de Matérn, ce qui permet de s'appuyer sur la littérature existante et d'obtenir une approximation creuse de la matrice de précision. Les paramètres de covariance associés à la covariance de Matérn ont également une interprétation statistique lorsque l'on considère les paramètres d'intérêt comme des champs aléatoires gaussiens, à savoir la variance marginale et la longueur de corrélation. D'un point de vue mécanique, cela permet d'établir un lien entre les hyperparamètres de la méthode et des propriétés microstructurales. Les paramètres de covariance peuvent ne pas être connus a priori, et on propose une méthode d'identification basée sur une approche de Bayes empirique. Dans cette approche, les hyperparamètres sont estimés itérativement par une régression de variogramme. Nous présentons les avantages de cette approche par rapport à l'utilisation d'autres estimateurs comme l'estimateur du maximum de vraisemblance en exposant les difficultés rencontrées.

2 Développement

L'approche est formulée comme un problème inverse Bayésien. Dans un domaine Ω considéré, on considère que le champ de tenseur élastique $C(x)$ dépend d'un champ à valeur scalaire $p(x)$. Le champ



de déplacement observé lors de l'essai DIC est représenté par des observations ponctuelles u^{obs} d'un champ de déplacement défini sur un sous-domaine Ω^{obs} , et une force macroscopique mesurée F^{obs} . Dans la modélisation Bayésienne, p est un champ aléatoire Gaussien de moyenne p_0 et de covariance Σ_p , et un modèle de bruit Gaussien est formulé sur les observations u^{obs} et F^{obs} . En utilisant la formule de Bayes, la densité postérieure de p sachant les observations $y^{\text{obs}} = (u^{\text{obs}}, F^{\text{obs}})$ est donnée par

$$D(p|y^{\text{obs}}) \propto D(y^{\text{obs}}|p)D(p)$$

On s'intéresse à un estimateur du maximum a posteriori du paramètre à identifier, alors défini par

$$p_{\text{MAP}} = \underset{p}{\operatorname{argmin}} \left[\frac{1}{2}(y(p) - y^{\text{obs}})^T \Sigma_y^{-1} (y(p) - y^{\text{obs}}) + \frac{1}{2}(p - p^0)^T \Sigma_p^{-1} (p - p^0) \right]$$

Typiquement, Σ_p est une matrice dense, calculée via une fonction de corrélation donnée. Dans ces travaux, dans un cadre discret, on s'appuie sur la littérature existante pour aboutir à une approximation creuse, en utilisant la fonction de covariance de Matérn, et le lien établi avec les équations aux dérivées partielles stochastiques dans [4]. Dans ce cadre, la matrice de précision Σ_p^{-1} prend la forme

$$\Sigma_p^{-1} = \beta(\ell, \sigma^2)(M + \ell^2 K)M^{-1}(M + \ell^2 K)$$

où M et K sont respectivement les matrices de masse et de rigidité utilisées dans la discrétisation éléments finis, ℓ et σ^2 sont des hyperparamètres, et $\beta(\ell, \sigma^2)$ est connu. On précise également la forme de la matrice de bruit Σ_y , dont une approximation creuse est également possible et dépend de l'algorithme de corrélation d'images employé. On fait le lien avec la littérature de DIC existante pour préciser ces formulations pour les algorithmes de DIC globale. L'utilisation de la fonction de covariance de Matérn nécessite de sélectionner les hyperparamètres du modèle de covariance, dont on donne une interprétation statistique vis à vis du paramètre matériau à identifier, savoir la longueur de corrélation $\rho \propto \ell$ et la variance marginale σ^2 . Ce choix n'étant pas toujours évident, nous proposons une approche de sélection des hyperparamètres basée sur une approche de Bayes empirique. Une des principales contributions de ces travaux est de comparer différents choix d'estimateurs statistiques dans l'approche de Bayes empirique. En particulier, on montre qu'un schéma itératif qui se base sur une régression de variogramme des champs à identifier permet d'aboutir à une méthode d'identification stable.

3 Résultats

Pour illustrer la méthode on cherche à identifier le module d'Young E d'un matériau isotrope. Pour cela, on génère un matériau synthétique de module d'Young $E(x)$, où $\ln E$ est un champ aléatoire gaussien avec une covariance de Matérn de longueur de corrélation ρ et de variance marginale σ_0^2 . Le champ

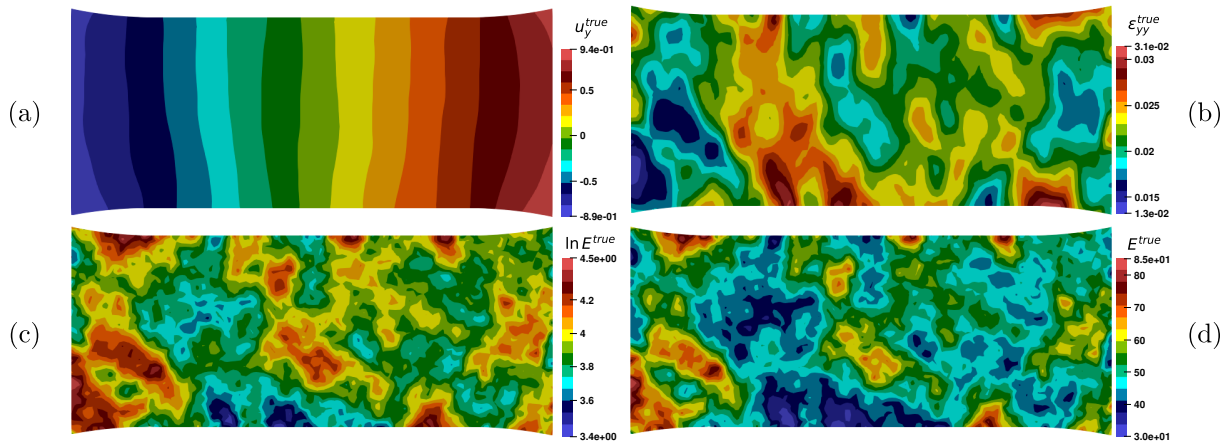


FIGURE 1 – Données synthétiques générées : déplacement simulé (a), paramètre élastique $p = \ln E$ généré (c), champ de module d'Young résultant $E = \exp(p)$ (d), champ de déformation simulé (b).

généré est représenté en figure 1, et un essai de traction est simulé avec des conditions de Neumann homogènes sur les deux extrémités de l'éprouvette numérique.

Le champ de déplacement résultant est ensuite bruité par un bruit blanc de variance σ_u . En appliquant la méthode décrite dans la section précédente, on identifie à la fois le paramètre inconnu $p = \ln E$, et les hyperparamètres ρ et σ^2 , en fonction du rapport signal bruit (exprimé en décibels). Le champ p^{opt} identifié est représenté en figure 2, où l'on montre que la méthode est capable d'identifier correctement le champ de paramètre élastique inconnu. Un niveau de bruit élevé impacte l'estimation de p et des hyperparamètres associés : la longueur de corrélation est surestimée, tandis que la variance marginale est sousestimée. La figure 3 montre l'évolution des hyperparamètres identifiés en fonction du rapport signal bruit.

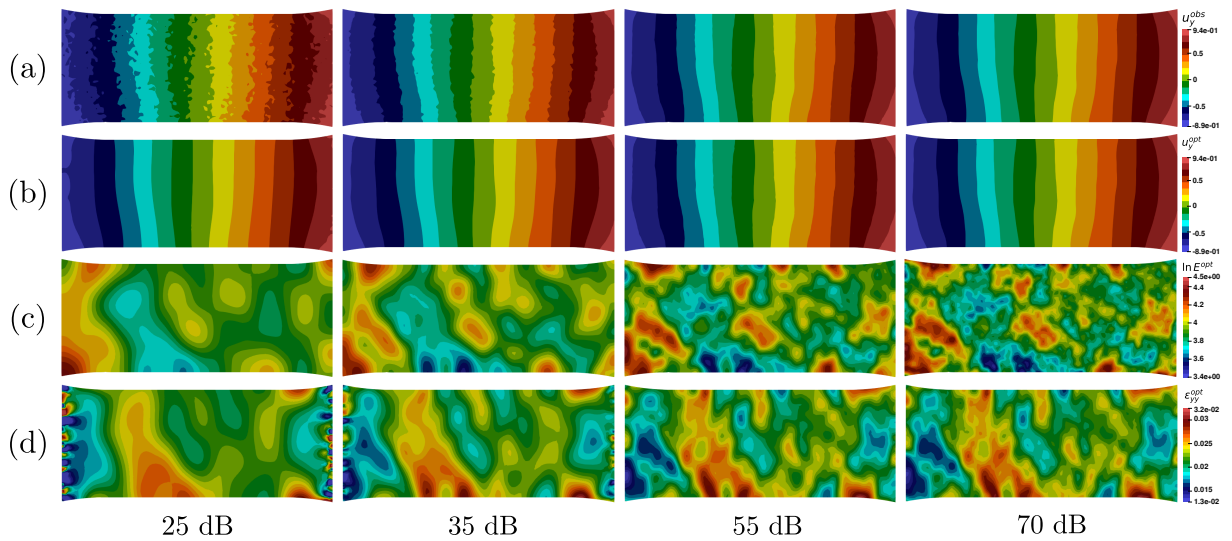


FIGURE 2 – Déplacement observé (a), déplacement simulé (b), paramètre élastique $p^{opt} = \ln E^{opt}$ identifié (c) et déformation identifiée (d) pour différents rapports signal bruit.

4 Conclusion et perspectives

La méthode proposée permet d'étendre les procédures d'identification plein champ à des champs de paramètres de raideur. Dans ces travaux on a proposé une méthode pour répondre aux défis spécifiques à l'identification de champs, et en particulier la structure de covariance des solutions. On a montré que la formulation Bayésienne adoptée permet de donner un sens statistique aux différents hyperparamètres de la méthode, et avons proposé une méthode de sélection de ces hyperparamètres. Dans ces travaux, nous

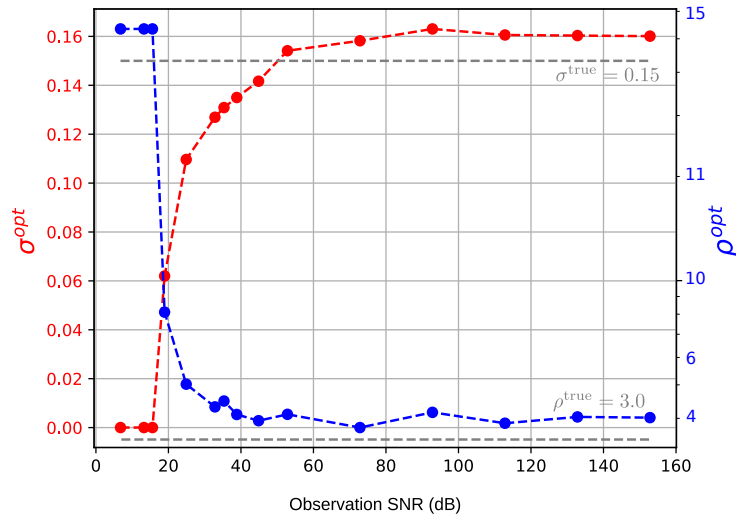


FIGURE 3 – Évolution des hyperparamètres identifiés en fonction du rapport signal bruit.

avons modélisé le paramètre inconnu par un champ aléatoire Gaussien stationnaire. Le cas non stationnaire, c'est-à-dire où les hyperparamètres sont des champs à valeur scalaire, n'est pas traité et constitue une extension potentielle. Ces travaux présentent un cadre numérique que les auteurs visent à appliquer aux composites à fibres discontinues, pour lesquels l'importante variabilité spatiale des propriétés élastiques a été mise en évidence. Cette application fera l'objet des travaux futurs.

Références

- [1] Michael Sutton, Jean-José Orteu, and Hubert Schreier. *Image Correlation for Shape, Motion and Deformation Measurements. Basic Concepts, Theory and Applications*. 01 2009.
- [2] Stéphane Avril, Marc Bonnet, Anne Sophie Bretelle, Michel Grediac, François Hild, Patrick Ienny, Félix Latourte, Didier Lemosse, Stéphane Pagano, Emmanuel Pagnacco, and Fabrice Pierron. Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements. *Experimental Mechanics*, 48(4) :381–402, August 2008.
- [3] Hugo Leclerc, Jean-Noël Périé, Stéphane Roux, and François Hild. Integrated digital image correlation for the identification of mechanical properties. volume 5496, pages 161–171, 05 2009.
- [4] Finn Lindgren, Håvard Rue, and Johan Lindström. An explicit link between gaussian fields and gaussian markov random fields : the stochastic partial differential equation approach. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)*, 73(4) :423–498, 2011.