

Nucléation de fissures au sein de matériaux hétérogènes à inclusions gonflantes par des approches de type champ de phase

G. Feugueur^{1,2}, L. Gélébart¹, C. Maurini², S. Miro³

¹ Université Paris-Saclay, CEA, Service de Recherche en Matériaux et procédés Avancés, 91191, Gif/Yvette, France, {gerald.feugueur,lionel.gelebart}@cea.fr

² CNRS, Institut Jean Le Rond d'Alembert, Sorbonne Université, UMR 7190, 75005, Paris, France, corrado.maurini@sorbonne-universite.fr

³ CEA, DES, ISEC, DPME, Université de Montpellier, Marcoule 30207, France, sandrine.miro@cea.fr

Résumé — Pendant le stockage des déchets radioactifs, les inclusions de phases cristallines, riches en produits de fission, sont soumises à une auto-irradiation α provoquant leur gonflement susceptible d'engendrer une fissuration de la matrice vitreuse. L'approche par champ de phase permet de prédire non seulement la nucléation de fissures, mais aussi la propagation de ces dernières. Dans cette communication, il est question de proposer différentes approches pour quantifier la nucléation de fissures en se rattachant au gonflement critique ϵ_c^s .

Mots clés — Nucléation de fissures, Champ de phase, Matériaux hétérogènes, Méthode FFT.

Introduction

Afin d'évaluer l'effet de la microstructure sur la nucléation de fissures au sein de matériaux hétérogènes à inclusions gonflantes en se rattachant au gonflement critique ϵ_c^s de ces dernières, une approche globale simplifiée fondée sur les modèles de champ de phase [1] et inspirée des travaux de la thèse de Vincent Gauthier [2] a été proposée. En effet, les temps de calcul pour une résolution numérique en champ complet, par des modèles de type champ de phase, évoluent de manière croissante avec la complexité de la microstructure et la taille du problème à résoudre. Le recours à des approches simplifiées devient alors intéressant pour évaluer le gonflement critique ϵ_c^s à moindre coût. Dans la thèse de Vincent Gauthier, une approche analytique simplifiée locale a été proposée dans le cadre d'une inclusion sphérique gonflante permettant ainsi d'établir un critère d'amorçage local [2]. Ces approches simplifiées permettent notamment de considérer des microstructures plus complexes, tant sur la forme des inclusions que sur la distribution de ces dernières, mais aussi des microstructures réelles issues d'images MEB-FIB 3D. Ces microstructures complexes peuvent être générées aléatoirement par les outils développés au CEA tel que Combs et Voxelize (voir [3] pour plus de détails sur la génération de microstructures aléatoires et leurs voxelisation). Dans la même veine, une approche locale fondée sur l'approche par champ de phase [1] sous l'hypothèse d'un état d'endommagement homogène [4] permet d'établir un critère d'amorçage sur ces mêmes microstructures complexes. L'objet de cette communication est donc de présenter et comparer les trois approches, à savoir l'approche en champ complet et les approches simplifiées (locale et globale) ainsi que de quantifier l'amorçage des premières fissures pour des microstructures simplifiées et complexes dans le cadre de matériaux hétérogènes à inclusions gonflantes.

1 Modèles de champ de phase pour la rupture fragile

L'approche de la rupture fragile par le champ de phase est issue de la régularisation de l'approche variationnelle de la rupture de Francfort et Marigo [1]. Suite aux travaux d'Ambrosio et Tortorelli [5], la régularisation proposée par Bourdin, Francfort et Marigo [6] repose sur la minimisation de l'énergie totale \mathcal{E} , qui est la somme des énergies potentielle Ψ_s et de rupture Ψ_c , s'écrivant comme suit :

$$\begin{aligned} (\underline{u}, \phi) &= \min_{\underline{u}, \phi \in [0,1]} \{ \mathcal{E}(\underline{u}, \phi, \nabla \phi) = \Psi_s(\underline{u}, \phi) + \Psi_c(\phi, \nabla \phi) \} \\ &= \min_{\underline{u}, \phi \in [0,1]} \left\{ \mathcal{E}(\underline{u}, \phi, \nabla \phi) = \int_{\Omega} g(\phi) \psi_0(\epsilon(\underline{u})) \, dV + \int_{\Omega} w_1(w(\phi) + \ell_0^2 \|\nabla \phi\|^2) \, dV \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

Les solutions lors de l'évolution quasi-statique à des pas de temps discrets sont obtenues avec une contrainte d'irréversibilité supplémentaire $\phi^n > \phi^{n-1}$ pour la variable d'endommagement.

Cette formulation initiale ne fait pas de distinction entre les états de contrainte en traction et en compression, ce qui entraîne potentiellement la formation de fissures parasites dans des régions en compression. Un rempart couramment utilisé consiste à séparer la densité d'énergie ψ_0 en une partie positive (associée aux états de traction) et une partie négative (associée aux états de compression) et à appliquer la fonction de dégradation g uniquement sur la partie positive, à savoir :

$$\psi(\underline{\varepsilon}(\underline{u}), \phi) = g(\phi)\psi_0^+(\underline{\varepsilon}(\underline{u})) + \psi_0^-(\underline{\varepsilon}(\underline{u})) \quad (2)$$

Dans la littérature, on peut trouver plusieurs façons de décomposer cette densité d'énergie ψ_0 , cependant, dans cette communication, on se focalisera uniquement sur la décomposition déviatorique introduite par Amor, Marigo et Maurini [7] et la décomposition spectrale introduite par Miehe, Hofacker et Welschinger [8].

Pour la décomposition déviatorique, les deux parties sont calculées pour des solides isotropes par :

$$\begin{cases} \psi_0^+(\underline{\varepsilon}) = \frac{\kappa}{2} \langle \text{tr}(\underline{\varepsilon}) \rangle_+^2 + \mu \text{dev}(\underline{\varepsilon}) : \text{dev}(\underline{\varepsilon}) \\ \psi_0^-(\underline{\varepsilon}) = \frac{\kappa}{2} \langle \text{tr}(\underline{\varepsilon}) \rangle_-^2 \end{cases} \quad (3)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé permettant d'exprimer le module d'élasticité isostatique $\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ et $\langle x \rangle_{\pm} = (x \pm |x|)/2$ désigne la fonction partie positive/négative.

En ce qui concerne la décomposition spectrale, les deux parties sont calculées pour des solides isotropes par :

$$\psi_0^{\pm}(\underline{\varepsilon}) = \frac{\lambda}{2} \langle \text{tr}(\underline{\varepsilon}) \rangle_{\pm}^2 + \mu (\underline{\varepsilon}^{\pm} : \underline{\varepsilon}^{\pm}) \quad (4)$$

où $\underline{\varepsilon}^{\pm}$ représente la décomposition spectrale du tenseur de déformation : $\underline{\varepsilon}^{\pm} = \sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon^i \rangle_{\pm} \underline{n}^i \otimes \underline{n}^i$, avec ε^i et \underline{n}^i les valeurs propres et les vecteurs propres du tenseur de déformation $\underline{\varepsilon}$.

Un choix classique pour la fonction de dégradation est $g(\phi) = (1 - \phi)^2 + k_0$ où $k_0 \ll 1$ est une rigidité résiduelle évitant la rigidité singulière dans l'état complètement endommagé et deux choix couramment utilisés pour la densité d'énergie de rupture sont le modèle AT2 ($w(\phi) = \phi^2$) pour lequel l'endommagement se produit dès les premiers instants du chargement et le modèle AT1 ($w(\phi) = \phi$) qui présente un seuil d'endommagement précédé d'un régime élastique linéaire [5].

Le problème couplé peut être résolu en minimisant la fonctionnelle d'énergie (éq. 1), conduisant aux équations locales suivantes :

— pour la partie champ de phase :

$$w_1 (w'(\phi) - 2\ell_0^2 \Delta \phi) = g'(\phi) \psi_0^+(\underline{\varepsilon}) \quad (5)$$

— pour la partie élastique endommageable :

$$\begin{cases} \text{div}(\underline{\sigma}(\underline{u}, \phi)) = \underline{0} \\ \underline{\sigma}(\underline{u}, \phi) = g(\phi) \frac{\partial \psi_0^+}{\partial \underline{\varepsilon}}(\underline{u}) + \frac{\partial \psi_0^-}{\partial \underline{\varepsilon}}(\underline{u}) \\ \underline{\varepsilon}(\underline{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u}) \end{cases} \quad (6)$$

où $\underline{\sigma}(\underline{u}, \phi)$ est la contrainte locale, qui suit une loi de comportement du matériau dépendant du champ de déplacement \underline{u} et du champ de phase ϕ . La partie positive de la densité d'énergie élastique ψ_0^+ joue le rôle de terme source dans l'équation de champ de phase (éq.5).

2 Estimation du seuil de nucléation des fissures

Dans cette section, il est question de présenter les différentes approches visant à évaluer le seuil de fissuration. Toutes ces approches sont fondées sur la modélisation par champ de phase présentée ci-dessus en faisant ou non des hypothèses simplificatrices.

2.1 Approche en champ complet

Le schéma alterné introduit par Bourdin, Francfort et Marigo [6] est utilisé pour résoudre séparément le problème de champ de phase (éq. 5) et le problème élastique (éq. 6). Le schéma alterné consiste à résoudre le problème du champ de phase en considérant le champ élastique connu puis à résoudre le problème élastique à champ de phase donné. On se propose ci-dessous de résoudre ces problèmes à l'aide de méthodes FFT.

2.1.1 Implémentation du schéma alterné en FFT

Résolution du problème élastique

L'inconnue dans le problème élastique (éq. 6) est la déformation $\underline{\varepsilon}$ au lieu du déplacement \underline{u} . Le champ d'endommagement est considéré comme un paramètre à un pas de temps donné. La solution du problème élastique (éq. 6) peut être obtenue par résolution itérative de l'équation de Lippmann Schwinger [9] :

$$\underline{\varepsilon}(\underline{x}) = -\underline{\Gamma}^0 * \underline{\tau}(\underline{x}) + \underline{E} \quad \text{avec} \quad \underline{\tau}(\underline{x}) = \underline{\sigma}(\underline{x}) - \underline{C}^0 : \underline{\varepsilon}(\underline{x}) \quad (7)$$

où $\underline{\tau}$ est le champ de polarisation, et $\underline{\Gamma}^0$ est l'opérateur de Green d'ordre 4 pour la déformation qui est calculé dans l'espace de Fourier en fonction des constantes élastiques du matériau de référence \underline{C}^0 choisi comme dans [9] permettant d'obtenir un taux de convergence optimal pour la solution élastique. Le champ de contrainte $\underline{\sigma}$ est calculé dans l'espace réel en utilisant la loi de comportement de l'équation 6, ce qui permet de prendre en compte les effets de l'évolution de l'endommagement et de la condition unilatérale. Le schéma itératif de point fixe donné par l'équation 7 correspond au schéma de base proposé initialement par Moulinec et Suquet [9]. Une procédure d'accélération de la convergence [10] est utilisée pour améliorer les performances de l'algorithme du point fixe. L'utilisation d'un opérateur de Green modifié [11], strictement équivalent à l'utilisation d'éléments finis hexaédriques à intégration réduite dans un code Élément Finis « standard » [12] améliore la qualité de la solution ainsi que la convergence de l'algorithme itératif (pour s'en convaincre, toujours dans le cadre d'une inclusion gonflante, une comparaison des champs de contraintes a été faite et exposée dans [3]).

Résolution du problème de champ de phase

Pour résoudre le problème de champ de phase, un algorithme itératif similaire à celui du problème élastique a été proposé [13]. L'objectif de cet algorithme itératif est de trouver le champ de phase ϕ^{n+1} au pas de temps t_{n+1} sur la base de la densité d'énergie Ψ_0^{+n} et du champ de phase ϕ^n qui sont connus au pas de temps précédent t_n .

La méthode retenue pour prendre en compte l'hétérogénéité est celle proposée par Ernesti [14] en introduisant une fonction caractéristique θ au niveau de la fonction de dégradation g . L'expression proposée par Ernesti a été légèrement modifiée pour se ramener à une forme plus couramment utilisée pour la fonction de dégradation g :

$$g(\underline{x}, \phi) = \theta(\underline{x}) (k_0 + (1 - \phi)^2) + (1 - \theta(\underline{x})) \quad (8)$$

Dans la matrice endommageable, $\theta = 1$, soit $g(\underline{x}, \phi) = k_0 + (1 - \phi)^2$, et dans les inclusions non endommageables, $\theta = 0$ soit $g(\underline{x}, \phi) = 1$.

Afin de définir un champ de polarisation et un opérateur de Green pour le problème de champ de phase, il est nécessaire de réécrire l'équation associé à ce problème sous la forme :

$$A^n(\underline{x})\phi(\underline{x}) - \Delta\phi(\underline{x}) = B^n(\underline{x}) \quad (9)$$

avec A^n et B^n valant :

$$A^n(\underline{x}) = \frac{8}{3} \frac{\Psi_0^{+n}(\underline{x})}{G_c \ell_0} \quad \text{et} \quad B^n(\underline{x}) = \left(A^n(\underline{x}) - \frac{1}{2} \frac{1}{\ell_0^2} \right) = \left(\frac{8}{3} \frac{\Psi_0^{+n}(\underline{x})}{G_c \ell_0} - \frac{1}{2} \frac{1}{\ell_0^2} \right) \quad (10)$$

dans le cadre du modèle AT1. Les expressions analogues de ces opérateurs pour le modèle AT2 sont explicitées dans [13].

En introduisant un paramètre homogène A_0^n , l'équation 9 devient :

$$A_0^n \phi(\underline{x}) - \Delta \phi(\underline{x}) = \chi(\underline{x}) \quad (11)$$

avec $\chi(\underline{x})$, le champ défini par :

$$\chi(\underline{x}) = B^n(\underline{x}) - (A^n(\underline{x}) - A_0^n) \phi(\underline{x}) \quad (12)$$

Comme pour le tenseur d'élasticité \mathbb{C}^0 du milieu élastique linéaire homogène introduit dans le problème (éq. 7), on peut définir l'opérateur de Green associé à ce milieu en faisant une analogie avec l'expression des coefficients de Lamé donnée par Moulinec et Suquet [9] de la manière suivante [10] :

$$A_0^n = \frac{1}{2} \left(\inf_{\underline{x} \in \Omega} A^n(\underline{x}) + \sup_{\underline{x} \in \Omega} A^n(\underline{x}) \right) \quad (13)$$

L'algorithme du point fixe est ensuite utilisé pour résoudre le problème de champ de phase (éq. 11) afin de trouver un nouveau champ d'endommagement ϕ^{i+1} , en supposant que le champ χ^i est connu au pas d'itération précédent i . L'inversion de l'opérateur Laplacien est coûteux en calcul dans l'espace réel, mais dans l'espace de Fourier, il peut être facilement calculé par multiplication locale avec le vecteur d'onde $\underline{\xi}$. Ainsi, la solution du problème (éq. 11) peut être exprimée dans l'espace de Fourier de la manière suivante :

$$\hat{\phi}(\underline{\xi}) = \frac{\hat{\chi}(\underline{\xi})}{A_0^n + \underline{\xi} \cdot \underline{\xi}} \quad (14)$$

2.1.2 Définition du seuil

Sur la réponse macroscopique représentant ici la valeur moyenne sur la cellule d'une composante du tenseur de déformation $\underline{\varepsilon}$ en fonction du gonflement, on remarque que l'apparition d'une fissure se traduit par un saut sur la courbe (fig. 1).

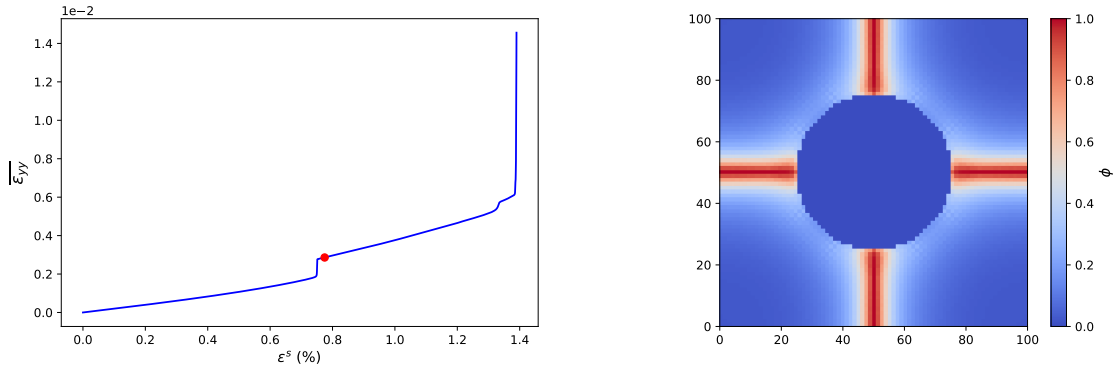


FIGURE 1 – Réponse macroscopique en fonction du gonflement en AT2 (à gauche) et champ d'endommagement ϕ à l'instant où apparaît la première fissuration (à droite) (extrait de [3])

Une façon de détecter ces sauts, consiste à repérer les pics sur la dérivée de la réponse macroscopique. L'avantage de ce choix, est qu'il est valable quelque soit le modèle de champ de phase utilisé. Le gonflement critique ε_c^s est ainsi donné par le premier pic pour lequel :

$$f''(\bar{\underline{\varepsilon}}(\varepsilon^s)) = 0 \quad (15)$$

où f est un opérateur agissant sur la valeur moyenne spatiale du tenseur de déformation $\bar{\underline{\varepsilon}}$. On choisit ici $f(\bar{\underline{\varepsilon}}) = \|\bar{\underline{\varepsilon}}\| = \sqrt{\bar{\underline{\varepsilon}} : \bar{\underline{\varepsilon}}}$

2.2 Approche locale simplifiée

2.2.1 Simplification et méthodologie

Les récents travaux de De Lorenzis et Maurini [4] permettent d'établir un critère de nucléation pour les modèles de champ de phase sous l'hypothèse d'un état d'endommagement homogène. Pour ces états d'endommagement homogènes pour lesquels $\nabla\phi = \underline{0}$, le critère d'endommagement implique que l'endommagement ne peut évoluer que si la déformation est à la frontière du domaine élastique \mathcal{R} suivant :

$$\mathcal{R}(\phi) = \left\{ \underline{\varepsilon} \in \mathcal{S}, -\frac{\partial\psi(\underline{\varepsilon}, \phi)}{\partial\phi} \leq w_1 w'(\phi) \right\} = \left\{ \underline{\varepsilon} \in \mathcal{S}, \Psi_0^+(\underline{\varepsilon}) \leq -\frac{w_1 w'(\phi)}{g'(\phi)} \right\} \quad (16)$$

Sous chargement multi-axial, pour des structures suffisamment grandes, les états homogènes ne peuvent perdre leur stabilité que lorsque la déformation est à la limite du domaine élastique et que le matériau est en phase d'adoucissement des contraintes [15]. La valeur critique de l'endommagement ϕ_c pour le passage à la phase d'adoucissement des contraintes est défini de la manière suivante sous l'hypothèse d'un état de contrainte uniaxial σ_e :

$$\phi_c = \arg \sup_{\phi \in [0,1]} \sigma_e(\phi) = \arg \sup_{\phi \in [0,1]} \sqrt{\frac{2E w_1 w'(\phi)}{\left(\frac{1}{g(\phi)}\right)'}} \quad (17)$$

où $\phi_c = 0$ en AT1 et $\phi_c = 1/4$ en AT2.

La surface de résistance sous chargement multi-axial peut alors s'exprimer de la manière suivante dans un cadre générique qui tient compte de la dissymétrie traction/compression :

$$\mathcal{S}(\phi_c) = \left\{ \underline{\varepsilon} \in \mathcal{S}, \Psi_0^+(\underline{\varepsilon}) = -\frac{w_1 w'(\phi_c)}{g'(\phi_c)} \right\} \quad (18)$$

Elle donne la déformation maximale admissible pour les états homogènes. Cette surface est assimilée au seuil de nucléation, qui est une condition nécessaire à la nucléation des fissures mais pas suffisante.

2.2.2 Définition du seuil

Pour ce critère local, après avoir réalisé un calcul élastique pour un niveau de gonflement donné ε^{s*} , on évalue localement la partie positive de la densité d'énergie Ψ_0^{+*} et on recherche l'endroit $\underline{x}_c \in \Omega^M$ dans la matrice où cette quantité est maximale. En appliquant ensuite le critère en déformation (éq. 18), on trouve l'expression du gonflement critique ε_c^s en AT1 et en AT2 :

$$\varepsilon_c^s = \varepsilon^{s*} \sqrt{\frac{3}{16} \frac{G_c}{\ell_0} \frac{1}{\Psi_0^{+*}(\underline{x}_c)}} \quad (\text{AT1}) \quad \text{et} \quad \varepsilon_c^s = \varepsilon^{s*} \sqrt{\frac{1}{6} \frac{G_c}{\ell_0} \frac{1}{\Psi_0^{+*}(\underline{x}_c)}} \quad (\text{AT2}) \quad (19)$$

2.3 Approche globale simplifiée

2.3.1 Simplification

Dans le cadre de cette approche simplifiée, on fait l'hypothèse que le champ d'endommagement est homogène par phase. Ce champ, solution de la fonctionnelle d'énergie à minimiser vaut ϕ^h dans les phases endommageables (matrice vitreuse) et y est nul dans les phases non endommageables (inclusions). Sous cette hypothèse simplificatrice, le terme à gradient d'endommagement ($\|\nabla\phi\|$) disparaît du bilan thermodynamique (éq. 1) et ce dernier se réécrit de la manière suivante en prenant en compte la dissymétrie traction/compression :

$$\begin{aligned} (\underline{u}, \tilde{\phi}^h) &= \min_{\underline{u}, \phi^h \in \mathcal{C}^\phi} \left\{ \int_{\Omega^I} \Psi_0(\underline{\varepsilon}(\underline{u})) dV + \int_{\Omega^M} g(\phi^h) \Psi_0^+(\underline{\varepsilon}(\underline{u})) + \Psi_0^-(\underline{\varepsilon}(\underline{u})) dV + \int_{\Omega^M} w_1 w(\phi^h) dV \right\} \\ &= \min_{\underline{u}, \phi^h \in \mathcal{C}^\phi} \left\{ \int_{\Omega^I} \Psi_0(\underline{\varepsilon}(\underline{u})) dV + \int_{\Omega^M} g(\phi^h) \Psi_0^+(\underline{\varepsilon}(\underline{u})) + \Psi_0^-(\underline{\varepsilon}(\underline{u})) dV + w_1 w(\phi^h) \Omega^M \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

où \mathcal{C}^ϕ est le sous-espace des fonctions constantes dans $[0, 1]$.

2.3.2 Méthode de minimisation du problème simplifié (20)

Pour un niveau de gonflement donné ε^{s*} , un calcul élastique permet d'obtenir le champ de déplacement qui minimise la fonctionnelle d'énergie (éq. 20) à ϕ^h fixé. À partir du champ de déformation obtenu numériquement, ici par FFT (ou analytiquement pour une géométrie particulière d'inclusion [2]), on peut ainsi calculer l'énergie potentielle Ψ_s . Concernant l'énergie de rupture Ψ_c , son expression analytique est connue et dépend du modèle de champ de phase. Connaissant l'ensemble des énergies et par conséquent l'énergie totale \mathcal{E} en fonction de ϕ , on peut alors facilement déterminer la solution ϕ^h qui minimise cette fonctionnelle d'énergie (fig. 2(a)).

On peut désormais construire l'évolution de l'endommagement $\tilde{\phi}^h$ qui minimise cette fonctionnelle d'énergie en fonction du gonflement ε^s (fig. 2(b)) du fait que la déformation est proportionnelle au chargement ε^s et que l'énergie est une fonction quadratique de la déformation par la relation suivante :

$$\Psi_s(\varepsilon^s, \phi^h) = \left(\frac{\varepsilon^s}{\varepsilon^{s*}}\right)^2 \Psi_s(\varepsilon^{s*}, \phi^h) \quad (21)$$

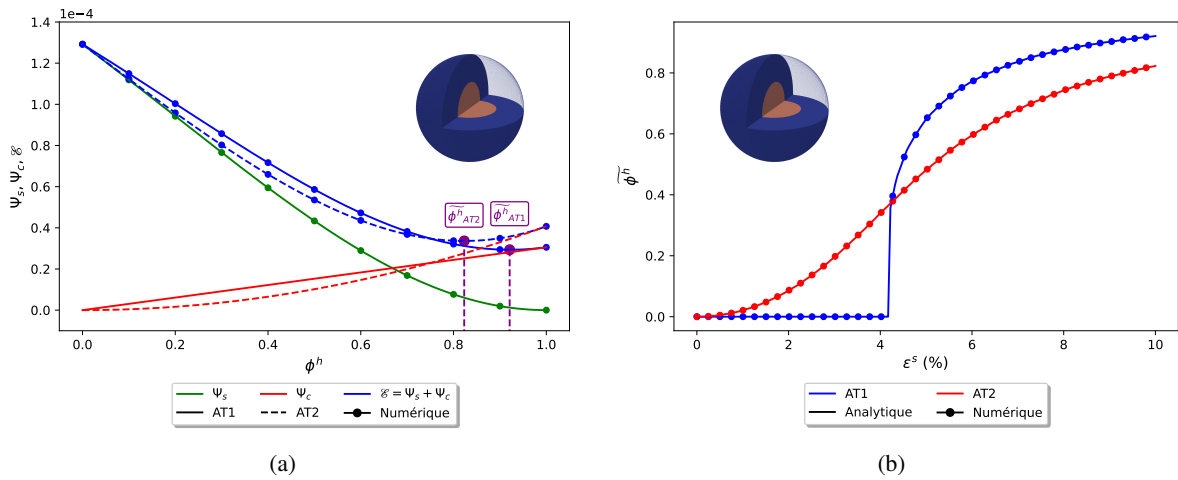


FIGURE 2 – Représentation des énergies en fonction de l'endommagement homogène ϕ^h dans la matrice pour un niveau de gonflement donné $\varepsilon^{s*} = 10\%$ (2(a)) et évolution de l'endommagement $\tilde{\phi}^h$ en fonction du gonflement ε^s (2(b)) en AT1 et AT2

2.3.3 Définition du seuil

Le seuil s'obtient par analogie avec la définition du seuil pour l'approche en champ complet par l'intermédiaire de la réponse macroscopique. Comme on peut l'observer sur la réponse macroscopique (fig. 2(b)), à un niveau de gonflement ε_c^s particulier apparaît une instabilité liée au modèle de champ de phase caractérisée par un saut. Le gonflement critique ε_c^s est alors défini par la relation suivante dans le cadre du modèle AT1 :

$$\varepsilon_c^s = \min_{\tilde{\phi}^h > 0} \varepsilon^s(\tilde{\phi}^h) \quad (22)$$

Dans le cadre du modèle AT2, ce seuil peut être évalué de manière analogue à l'approche en champ complet en travaillant sur la dérivée seconde de la réponse macroscopique. Le gonflement critique ε_c^s est ainsi donné par le premier pic pour lequel :

$$\left(\tilde{\phi}^h\right)''(\varepsilon^s) = 0 \quad (23)$$

3 Effet de la distance entre 2 inclusions sur l'amorçage

On s'intéresse ici à l'effet de la distance minimale a entre 2 inclusions de diamètre $D \approx 62 \mu\text{m}$ dans un cadre 2D sur l'amorçage de la première fissure pour les différentes approches proposées. Il est à noter

que modifier la longueur interne ℓ_0 à G_c fixé modifie le seuil de fissuration. On choisit alors de travailler à $w_1 \sim G_c/\ell_0$ fixé, en adaptant G_c dans le modèle de champ de phase pour l'approche en champ complet. Cependant, comme ℓ_0 intervient au niveau du terme $\|\nabla\phi\|$, il est ainsi pertinent de faire varier cette longueur interne et d'en voir son effet sur l'amorçage. Pour les autres approches simplifiées, elles ne dépendent pas de ℓ_0 mais uniquement de $w_1 \sim G_c/\ell_0$.

Pour l'approche en champ complet, le gonflement critique ε_c^s ne suit pas une évolution monotone en fonction de la distance minimale a entre 2 inclusions à ℓ_0 fixé (fig. 3). Ce gonflement critique ε_c^s a une allure convexe et son minimum est atteint en une valeur critique a_c/ℓ_0 (fig. 3(a)) ou a_c/D (fig. 3(b)). Avant d'atteindre cette valeur critique, on observe qu'il s'agit du ligament le plus long qui rompt en premier (fig. 4(a) et 4(b)). Inversement, une fois cette valeur critique atteinte, on observe qu'il s'agit du ligament le plus court qui rompt en premier (fig. 4(c) et 4(d)). Cela vient du fait que lorsque $\ell_0 \gg a$, l'approche en champ complet ne peut voir les ligaments de faibles dimensions. On observe par ailleurs qu'à a/ℓ_0 fixé, lorsque ℓ_0 diminue, la première fissure apparaît plus précocement pour l'approche en champ complet. De plus, l'écart reste constant entre les deux décompositions, ce qui montre que l'approche en champ complet est indépendante de ℓ_0 à w_1 fixé mais aussi de a à paramètres du modèle fixés.

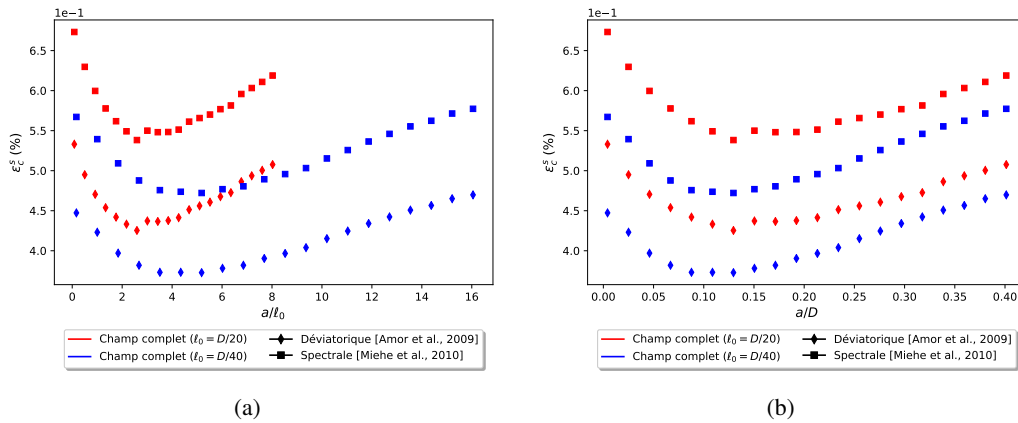


FIGURE 3 – Gonflement critique ε_c^s en fonction de a/ℓ_0 (3(a)) et a/D (3(b)) pour $\alpha^I = 20\%$

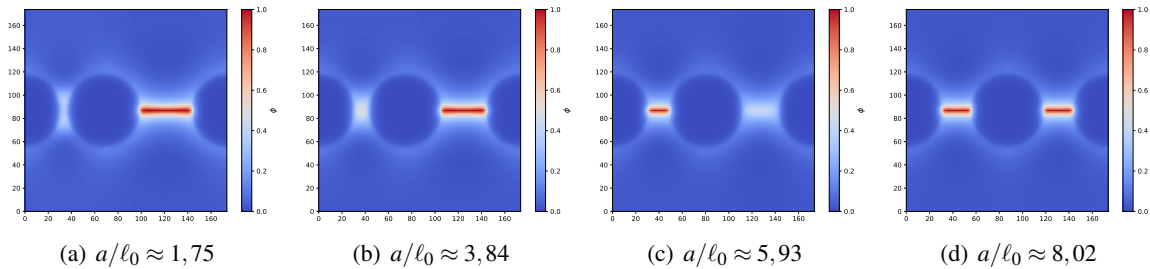


FIGURE 4 – Apparition de la première fissure pour $\ell_0 = D/20$ et $\alpha^I = 20\%$ avec la décomposition spectrale [8] (courbe ■ sur les figures 3(a) et 3(b))

On remarque de plus que l'approche en champ complet est encadrée par les deux approches simplifiées (locale et globale) (fig. 5). L'approche globale est quasi insensible à la distance minimale entre 2 inclusions tandis que l'approche locale dépend de cette distance. Par ailleurs, quelque soit l'approche, l'amorçage sera plus précoce avec la décomposition volumétrique/déviatorique.

4 Conclusions

Les différentes approches ont été confrontées dans une étude de sensibilité à la distance minimale entre inclusion. Le gonflement critique ε_c^s donné par l'approche en champ complet est encadré par les

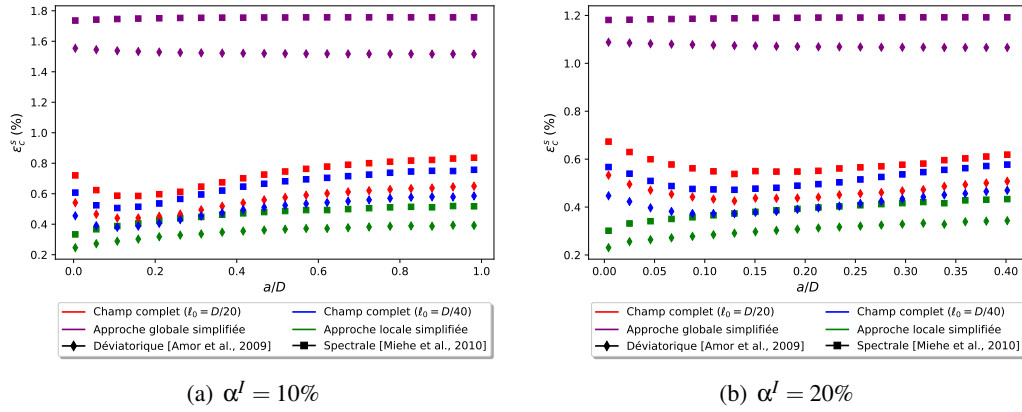


FIGURE 5 – Comparaison des approches en fonction du rapport a/D

approches simplifiées (locale et globale). L’amorçage sera également plus précoce pour une distance séparant deux inclusions faible. Il est à noter également que comme le terme à gradient d’endommagement disparaît de la fonctionnelle d’énergie \mathcal{E} , les approches simplifiées ne permettent pas de prendre en compte la taille des inclusions.

Références

- [1] G. Francfort et J-J. Marigo. *Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem.*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 46(8) :1319-1342, 1998.
- [2] V. Gauthier. *Modélisation de l’endommagement dans les milieux hétérogènes élastiques fragiles.*, Thèse de doctorat, Aix-Marseille, 2021.
- [3] G. Feugueur, L. Gélébart, C. Maurini, S. Miro et C. Bourcier. *Simulation numérique par FFT de la fissuration des matériaux hétérogènes à inclusions gonflantes*, CFM - Congrès français de mécanique, 2022.
- [4] L. De Lorenzis et C. Maurini *Nucleation under multi-axial loading in variational phase-field models of brittle fracture.*, International Journal of Fracture, 237(1-2) :61–81, 2022.
- [5] L. Ambrosio et V. Tortorelli *Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functional via gamma-convergence.*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 43, 999-1036, 1990.
- [6] B. Bourdin, G. Francfort et J-J. Marigo *Numerical experiments in revisited brittle fracture.*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 48, 797-826, 2000.
- [7] H. Amor, J-J Marigo et C. Maurini *Regularized Formulation of the Variational Brittle Fracture with Unilateral Contact : Numerical Experiments.*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 57 : 1209–29, 2009.
- [8] C. Miehe, F. Welschinger et M. Hofacker *Thermodynamically consistent phase-field models of fracture : Variational principles and multi-field FE implementations.*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 83(10) :1273-1311, 2010.
- [9] H. Moulinec et P. Suquet *A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure.*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 157(1-2) :69–94, 1998.
- [10] Y. Chen, L. Gélébart, C. Chateau, M. Bornert, C. Sauder et A. King *Analysis of the damage initiation in a SiC/SiC composite tube from a direct comparison between large-scale numerical simulation and synchrotron x-ray micro-computed tomography.*, International Journal of Solids and Structures, 161 :111–126, 2019.
- [11] F. Willot *Fourier-based schemes for computing the mechanical response of composites with accurate local fields.*, Comptes Rendus Mécanique, 343(3) :232–245, 2015.
- [12] M. Schneider, D. Merkert et M. Kabel *FFT-based homogenization for microstructures discretized by linear hexahedral elements.*, International journal for numerical methods in engineering, 109(10) :1461–1489, 2017.
- [13] Y. Chen, D. Vasiukov, L. Gélébart et C. H Park *A FFT solver for variational phase-field modeling of brittle fracture.*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 349 :167–190, 2019.
- [14] F. Ernesti, M. Schneider et T. Böhlke *Fast implicit solvers for phase-field fracture problems on heterogeneous microstructures.*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 363 :112793, 2020.
- [15] K. Pham et J-J Marigo *Stability of homogeneous states with gradient damage models : size effects and shape effects in the three-dimensional setting.*, Journal of Elasticity, 110(1) :63–93, 2013.